

粒子、相互作用和时空的统一

向 应 明

一九九三年八月二十六日

摘 要

给空间一个由元胞构成的面心立方密排格子 \mathcal{A}_1 ，元胞的直径 $l_0 \sim 10^{-18} \text{ m}$ ，并且可以变形。完美无缺的 \mathcal{A}_1 是真空，有缺陷的 \mathcal{A}_1 是质空。时间是过程的量度。真空的对称性群是点群 O_h 和 T_d ，质空的对称性是紧致不连通李群 $S(O_h) = \{R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha, T_\alpha \in O_h\}$ 和 $S(T_d) = \{R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha, T_\alpha \in T_d\}, R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) \in SO(3, C)$ 。物质场 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 是质空中所有元胞的位置矢量的集合。物质场遵循以下定域规范对称性： $\Psi'(\vec{r}, t) = e^{-i\theta^\alpha(\vec{r}, t) T_\alpha} \Psi(\vec{r}, t)$ 。其中， T_α 是生成元，他们遵循的代数 $A(O_h)$ 和 $A(T_d)$ 分别是点群 O_h 与 T_d 的群代数。群代数 $A(O_h)$ 与 $A(T_d)$ 是李代数。 $A(O_h) = A(O^+) \oplus A(O^-)$ ， $A(O^\pm) = \frac{1 \pm \sigma}{2} A(O)$ ， $A(O) = \bigoplus_{i=1}^5 A_0^i \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2'$ ， $A(T_d) \cong A(O)$ ， σ 是空间反演操作， A_2 是 $SU(3)$ 的李代数， A_2' 是另外一个 $SU(3)$ 的李代数， A_1 是 $SU(2)$ 的李代数， A_0 是 $U(1)$ 的李代数。 $A(O_h)$ 的表示是 Gell-Mann's 夸克 (uds) 与他们的多重态。 $A(T_d)$ 的表示正是 18 个轻子 $(l_\nu, l, l^c)_L^s, s = e, \mu, \tau$ (基础表示与共轭表示) 和他们的多重态 (与夸克(cbt) 的多重态相同)。相互作用是 $A(O_h)$ 与 $A(T_d)$ 的定域规范场，相当于 $\bigotimes_{i=1}^5 U^i(1) \otimes SU^{spin}(2) \otimes SU^{flavor}(3) \otimes SU^{color}(3)$ 的对称性。元胞就是 Higgs 场。一个纯几何的引力理论包含流形(M)，度规(g^{ab}) 和 联络(Γ_{ab}^c)，引力作用量 $S = \int_M d^4x \sqrt{-g} R$ ，质空就是流形 M。联络 Γ 由流行的切矢丛决定，由质空的平移对称性计算得到。这样，我们通过一个特别量子时空，统一了现存的所有粒子与相互作用。

PACS No: 12.10.-g, 11.15.-q

Keywords: 空间，质空，量子时空，群代数，规范场，相互作用，粒子，引力，统一场论。

目录

摘要.....	2
目录.....	3
§1 引言.....	4
§2 空间结构与物质.....	6
§3 空间的对称性.....	8
§3-1 空间结构.....	8
§3-2 空间的对称性.....	11
§3-3 相互作用与粒子.....	12
§4 时间及时空的对称性.....	15
§4-1 运动过程、参照系.....	15
§4-2 时间的定义.....	16
§4-3 格波波速不变与狭义相对论.....	18
§5 粒子构造.....	18
§5-1 O_h 群代数的表示.....	18
§5-2 T_d 群代数的表示.....	21
§5-3 结论.....	28
§6 相互作用.....	28
§6-1 (uds)夸克族粒子之间的相互作用.....	29
§6-2 轻子族粒子间的相互作用.....	39
§7 引力相互作用.....	46
§7-1 引子.....	46
§7-2 描述时空.....	46
§7-3 纯几何化的引力作用量.....	47
§7-4 分立时空的引力场.....	48
§8 总结.....	51
附录 A T_d 和 O_h 群代数.....	51
A-1、群.....	51
A-2、群代数.....	52
A-3、 O_h 群代数 $A(O_h)$	54
A-4、 T_d 群代数.....	55
表 A-1 O 群与 S_4 群元之间的对应关系.....	55
表 A-2 O 群的乘法表.....	56
表 A-3 $H_i, E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}, E_{\pm(\alpha+\beta)}, H'_i, E'_{\pm\alpha}, E'_{\pm\beta}, E'_{\pm(\alpha+\beta)}$ 的对易关系.....	57
表 A-4 $H_1^+, H_2^+, H_3^+, E_{\pm\alpha}^+, E_{\pm\beta}^+, E_{\pm(\alpha+\beta)}^+$ 与 $H_1^-, H_2^-, H_3^-, E_{\pm\alpha}^-, E_{\pm\beta}^-, E_{\pm(\alpha+\beta)}^-$ 的对易关系.....	58
参考文献.....	59

§ 1 引 言

人类经过几个世纪的科学探索，一步步深化了人类对自然世界及其客观规律的认识。以牛顿(1642—1727)⁽¹⁾ 为代表的时代，建立了绝对的时间和绝对的空间理论，在此基础上创立了经典力学和经典理论的其它学科。在这个理论框架中，物质的存在与时间、空间无关，物质间的相互作用也与时间、空间无关。以爱因斯坦(1879—1955)为代表的另一个时代，批判性地继承了牛顿时代的科学成就，建立了相对论时空结构⁽²⁾，并创立了粒子的量子理论⁽³⁾。有了时空理论和动力学理论，人们从两个方面研究了微观粒子：粒子的结构和粒子间的相互作用。

自 1897 年 J. J. 汤姆逊(Thomson)⁽⁴⁾发现电子 e 后，开创了粒子物理之先河。之后，E. 卢瑟福(Rutherford)⁽⁵⁾在研究 α 粒子穿过物质薄箔时发现原子核、质子 p，继而 1932 年，J. 恰德魏克(chadwick)发现中子 n⁽⁶⁾，C. D. 安德逊(Anderson)利用云雾室发现正电子⁽⁷⁾。人们希望物质世界是由这几个小“砖头”垒成的。所以将这些粒子称为基本粒子。然而，1947 年后，发现了大量的与 e、p、n 等具有基本粒子特征的粒子，到 1992 年，大约有 700 余种⁽⁸⁾。这使得基本粒子这个词已失去意义。人们试图对这些粒子分类并寻找它们的内在联系。大的方面比较定型的分类如表 1。

表 1 粒 子 分 类

粒 子 类 别	范 围 粒 子	轻 子	强 子	
			介 子	重 子
粒 子 举 例	γ, W^\pm, Z^0	ν_e, e	π, η	p, n, Λ

对强子之间的内在联系，坂田(S. Sakata)首先考虑了 p、n、 Λ 间的 SU(3) 内部对称性⁽⁹⁾，但遇到了严重困难。之后，盖尔曼(M. Gell-Mann)和赖曼(Y. Neeman)引入夸克的概念⁽¹⁰⁾，将所有强子看成是夸克的复合体。他们将三个夸克(uds)(味, flavour)看成是 SU(3)的基本表示，而介子和重子则是 SU(3)的多维不可约表示。由于这些多维不可约表示可以由三维基本表示直乘分解得到，则可以将介子和重子看成夸克的复合体。之后，格林伯格(D. W. Greenberg)为解决重子结构的统计困难引入了夸克色(color)自由度⁽¹¹⁾。

人们在解决物质世界的结构时提出过许多种类的相互作用。比较基本的相互作用有：①早在十七世纪由牛顿总结出来并经过本世纪爱因斯坦几何化了的引力相互作用；②由十九世纪安培(A. M. Ampere)、法拉第(M. Faraday)、麦克斯韦(J. C. Maxwell)等人揭示了发现已久的电现象和磁现象的本质并统一而成的电磁相互作用；③广泛存在于轻子与轻子，轻子与强子，强子与强子之间的弱相互作用；④强子间的另一种相互作用—强相互作用。这四种相互作用的强度比是：引力：弱：电：强 $\approx 10^{-39} : 10^{-12} : 10^{-2} : 1$ 。在相互作用的认识过程中，人们试图去回答如何描述相互作用和这四种相互作用是否是统一的。

最先，人们用“力”来描述相互作用，如万有引力、库仑力。后来发展到场，如引力场，电磁场。这样的描述方式都没有将相互作用与物理系统的对称性联系起来。爱因斯坦首先将引力场与时空的广义坐标变换不变性联系起来，创立了广义相对论。这是迄今最好的引力理论(尽管量子化碰到了负几率等难以逾越的困难⁽¹²⁾)。之后，魏尔(H. Weyl)和伦敦(F. E. London)将电磁相互作用与局域相变换下的不变性联系起来⁽¹³⁾。具有关键性意义的是 1954 年，杨振宁和米尔斯(F. Mills)将局域规范不变性的思想引入强相互作用并取得成功⁽¹⁴⁾。这几乎证实了规范场理论是描述物理的相互作用的最有效工具这一思想。后来发展的 GWS 弱电统一理论⁽¹⁵⁾，QCD 理论等，都进一步证实了这一思想。

由于规范场天生就与物理系统的对称性相联系，这就使我们可以将系统的对称性做为研究的主要对象，使相互作用与粒子的结构联系起来，并且有可能通过寻找物理系更高的对称性来将几种相互作用统一起来。成功的有格拉肖(S. L. Glashow)、温伯格(S. Weinberg)和萨拉姆(A. Salam)的弱相互作用和电磁相互作用的统一理论⁽¹⁵⁾。乔治(H. Georgi)和格拉肖等人对强、弱、电统一相互作用做过有益的尝试⁽⁶⁾。值得指出的是所有这些对称性,除了引力相互作用起源于时空对称性之外,其它均是系统的内部对称。至于这个“内部”的确切涵义,谁也不能确切表述。但有一点是共同的,即是不同于时空的,或叫做时空之外的。

综上所述,粒子物理包括了三个方面的内容:时空结构、粒子构造和相互作用。在牛顿时代,时空是连续的、绝对的,粒子不依赖时空结构和相互作用存在,相互作用也不依赖时空结构和粒子结构而存在。在爱因斯坦时代,时空是连续的、相对的,粒子不依赖时空结构而存在,但却依赖内部空间的对称性,相互作用不依赖于时空结构却依赖内部对称性,见表2。

表2 时空观、粒子、相互作用的关系

时 代	时 空 观	粒 子	相 互 作 用
牛 顿	连续的, 时间、空间绝对	不依赖时空和相互作用	不依赖时空和粒子结构
爱因斯坦	连续的, 时间、空间相对	不依赖时空, 依赖相互作用	不依赖时空, 依赖内部空间, 决定粒子结构

从表2可以看出,现在粒子与相互作用已经结合起来(尽管这种结合还不完善,但其趋势已被人们认识)而成所谓内部空间的对称性。而内部空间是独立于时空之外的,这表明粒子和相互作用是独立于时空结构之外的。但是,粒子是存在于时空的,这就出现了下述几个问题:(1)粒子的颗粒性是怎样与时空的连续性统一的?真空在时空中是如何体现的?(2)广义相对论告诉我们,时空是几何化的,但物质不是几何化的,那么,在一个几何中怎样存在一个非几何的东西(物质)呢?(3)内部空间以一个什么方式与时空联系起来?

以上问题的回答,尽管有许多尝试,但在现有理论中是没办法调和的。而就物质世界的统一而言,最自然、最一般的想法是时空、粒子和相互作用是相互联系的,即相互作用(包括粒子结构)来自时空的对称性,粒子的颗粒性来源于时空的颗粒性—非连续性(即时空量子化)。这个想法在牛顿和爱因斯坦时空中是难以实现的,它要求我们跳出爱因斯坦或牛顿时空而进入另一时空。在这个时空中,相互作用(当然包括粒子结构)完全由时空的对称性确定,唯一的工作是建立时空结构,余下就只推理、演绎了。

非常幸运,我终于找到了这样的时空:**空间是分立的三维元胞的面心立方密排体,时间是过程的量度,两者通过空间平移不变性联系而成为真空。粒子是空间元胞结构的缺陷(类似于固体物理的情形)。电磁、弱、强相互作用来源于有缺陷时空(质空)的点群对称性,而引力相互作用来源于有缺陷时空的平移对称性。**这些就是本文要做的工作,所得结果与现有实验结果相符。

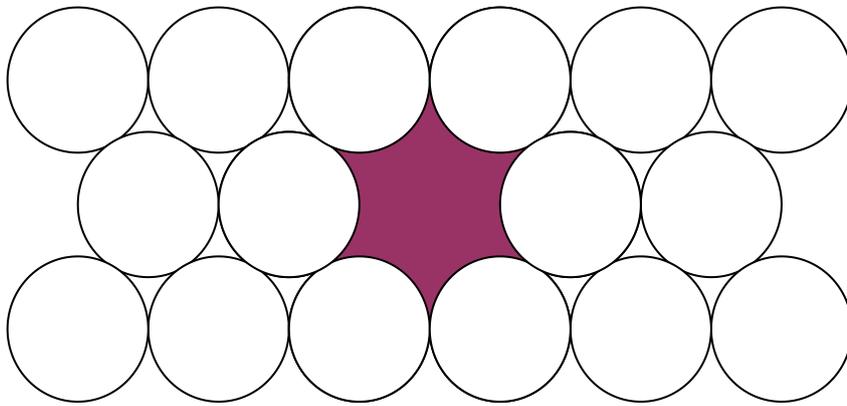
本文所使用的数学工具是群论(包括有限群和连续群)、群代数、李代数、微分几何、规范场理论。这些在一般的书中均有完善的叙述,故不做数学准备。

本文在建立空间结构之后,给出了物质、真空、质空的概念,然后依次研究了这些结构。§3研究了空间的对称性,并得到空间对称性与相互作用的关系。§4研究了时间的概念和运动的描述,得到时空的对称性。§5具体进行粒子的构造,构造出现有粒子。§6具体研究空间对称性并得到电、弱、强相互作用。§7专门研究引力相互作用。§8对本文做一总结。在附录A中给出了几个代数结论。

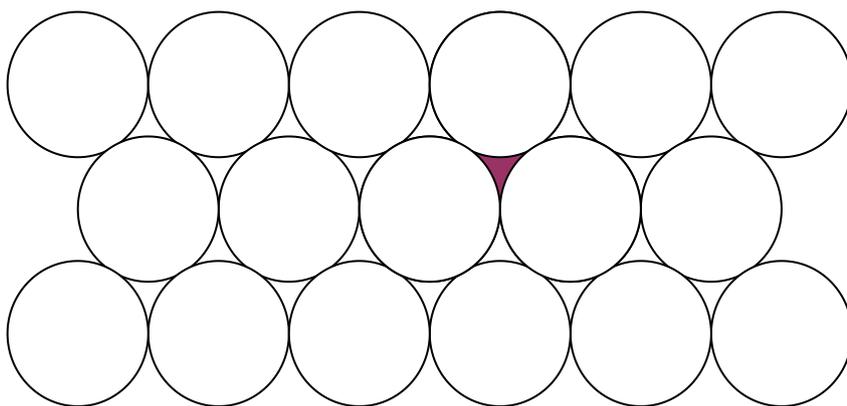
§ 2 空间结构与物质

空间有两类。一类是由球状元胞按最紧密最高对称性的面心立方密排堆积而成的无边无沿的结构，它没有缺陷，这就是真空。由于元胞是三维的，故真空也是三维的。元胞的大小即直径 l_0 有待确定。李政道曾给过一个上限 $l_0 < 10^{-16} \text{cm}^{(17)}$ ，本文 § 6 中得到 $l_0 \sim 10^{-18} \text{m}$ 。元胞还有其它性质，但这要与实验比较才能确定。例如，要使粒子间的相互作用具有现在实验中所表现的行为，元胞必须变形，这在以后的几节中有详细论述。另一类是有缺陷的面心立方密堆，称之为质空。质空有四种，见图 2-1。

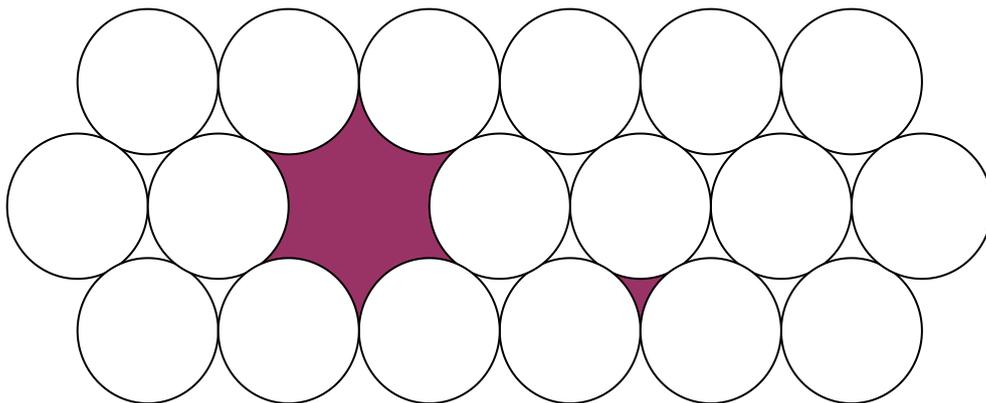
- (1) 只有空穴。即面心立方结构中某元胞缺少。它对应着正粒子态。
- (2) 只有在面心立方密排的空隙中有多余的填隙元胞，它对应着反粒子态。
- (3) 既有空穴又有空隙填隙元胞。它对应着正反粒子同时存在的状态。
- (4) 既没有空穴也没有空隙填隙元胞，而只有元胞的排列发生形变的情况。它对应着规范场的情况。



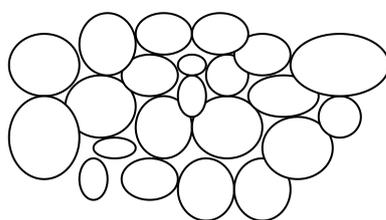
(1) 只有空穴



(2) 只有空隙填隙元胞



(3) 既有空穴，又有空隙填隙元胞



(4) 只有元胞结构形变

图 2 - 1 质空四种

值得指出的是，我们能改变和观察得到的是元胞与元胞之间的空间，而元胞之内是什么我们并不知道，也不需要知道。因为自然界中所有可观察的现象均发生在元胞与元胞之间的空间，即元胞之外。

在这个空间观中，真空不空是很好理解的。当真空中某元胞被打离其所所在位置而进入元胞之间的空隙，在元胞格子中就成为第三种质空，对应着正反粒子对。

就这么一个直观的空间结构，但它却决定着所有粒子和相互作用性质。

§ 3 空间的对称性

在这一节中，我们将先分析空间结构，然后找这个空间结构的对称性。

§ 3-1 空间结构

将许多元胞紧密地排成一直线，这一串元胞称之为密积排，如图 3-1。将许多密积

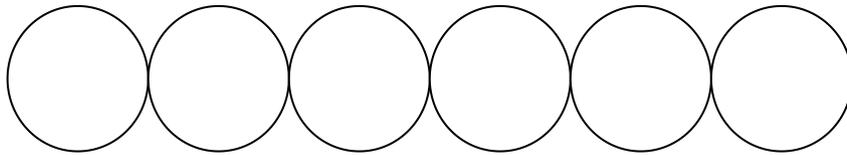


图 3-1 密积排

排按最紧密的方式嵌合成一个平面。这个平面叫做密积层，如图 3-2。这里所说的面是

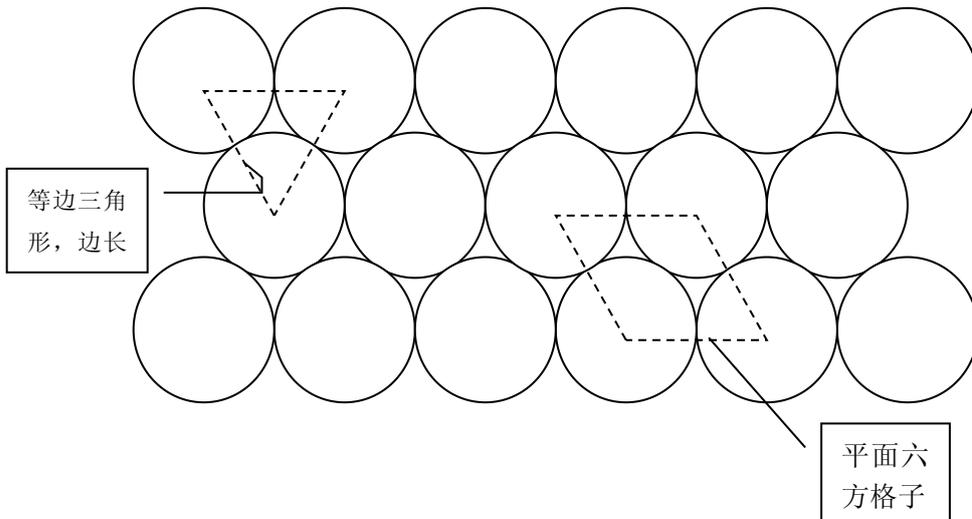


图 3-2 密积层

元胞中心所连的面。这里所说的最紧密方式嵌合意指第一密积排与相邻密积排之间平移

$1_0/2$ (1_0 为元胞直径) 再嵌合在一起。密积层有如下性质。(1)两个密积排之间的距离 $D = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0$

$< 1_0$; (2)密积层中任意相邻的三个元胞的中心连线均构成一个等边三角形，且边长均为 1_0 ；(3)层中每个元胞都与 6 个元胞相接触，并且该密积层可按平面六方格子分割，每个六方格子中包含一个元胞和 2 个空隙(元胞之间没被填满的部分)。因此，每一密积层中元胞数与空隙数之比为 1:2。

如图 3-3，将密积层 B 放在密积层 A 上，那么最紧密的放法只有一种，即让 B 层元胞坐落在 A 层元胞的空隙上，就得到密积双层，用符号 AB 表示。因为密积双层中每层的元胞数相等，而每层的空隙数比元胞多一倍，则 B 层元胞只能放在 A 层一半的空隙上，另一半则未被遮住。这种被遮住的空隙，将其四个元胞的中心连接起来，刚好构成一个正四面体。这种空隙叫做四面体空隙，用 T 表示。B 层的每一个元胞均形成一个四面体空隙。同理，

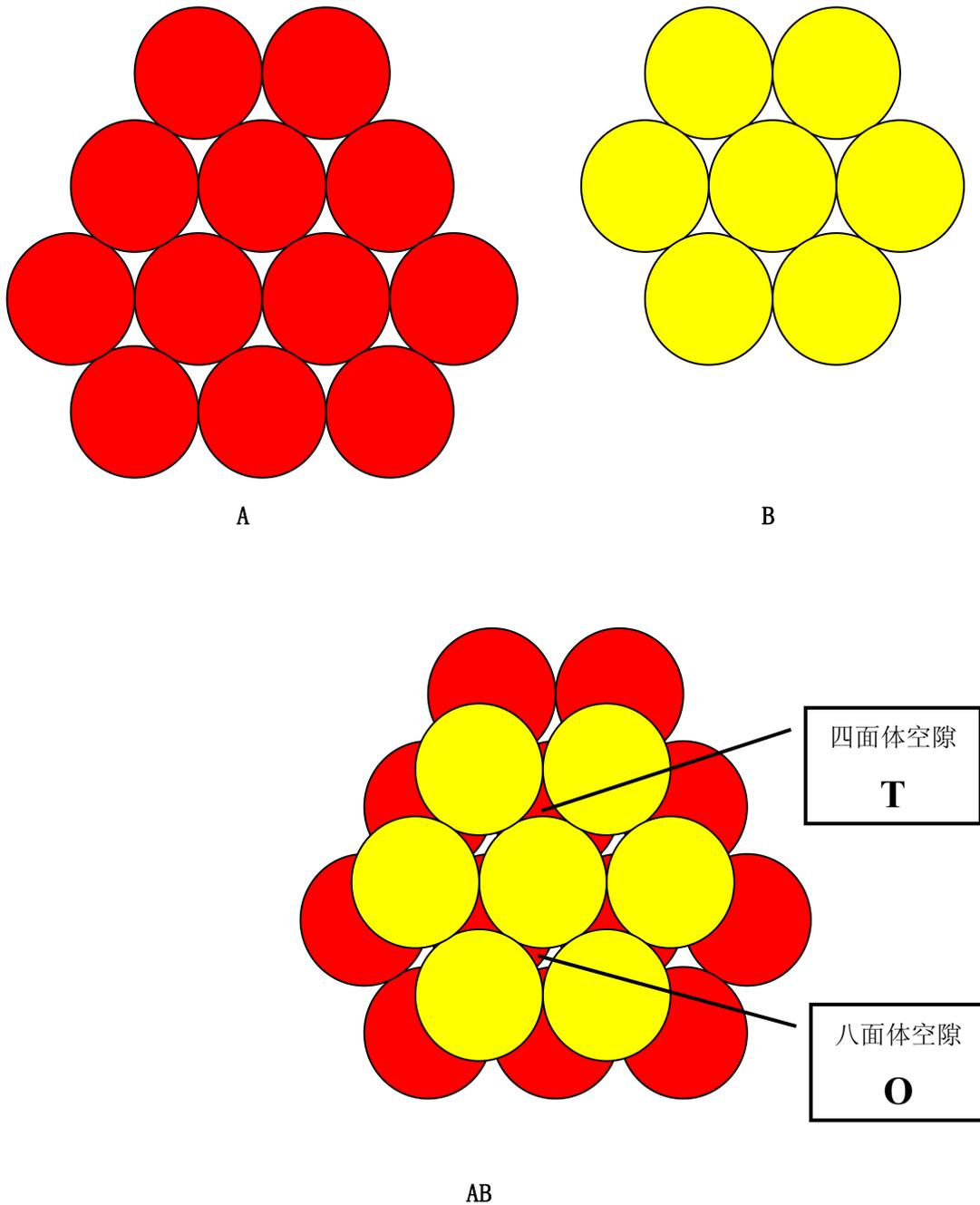


图 3-3 密积双层的构成

A层的每一个元胞形成一个四面体空隙。故密积双层AB中四面体空隙数是每层元胞数的2倍。在密积双层AB中的另一半空隙，其周围的六个元胞中心连线正好构成一个正八面体，将这种空隙称为八面体空隙，记为O，其个数等于每层元胞数。

将另一密积层C叠放在密积双层之上，最紧密的放法有两种。一种是将C层元胞放在AB层的四面体空隙之上，这样C层的地位与A层相同。以后的堆法如此类推。它构成简单六方密堆，记为 \mathcal{A}_3 ，如图3-4。但是，这种密堆积有一很特别的方向C，这与现有实验中空间各向同性不符。故空间结构不可能是 \mathcal{A}_3 。另一种是将C层元胞放在AB双层的八

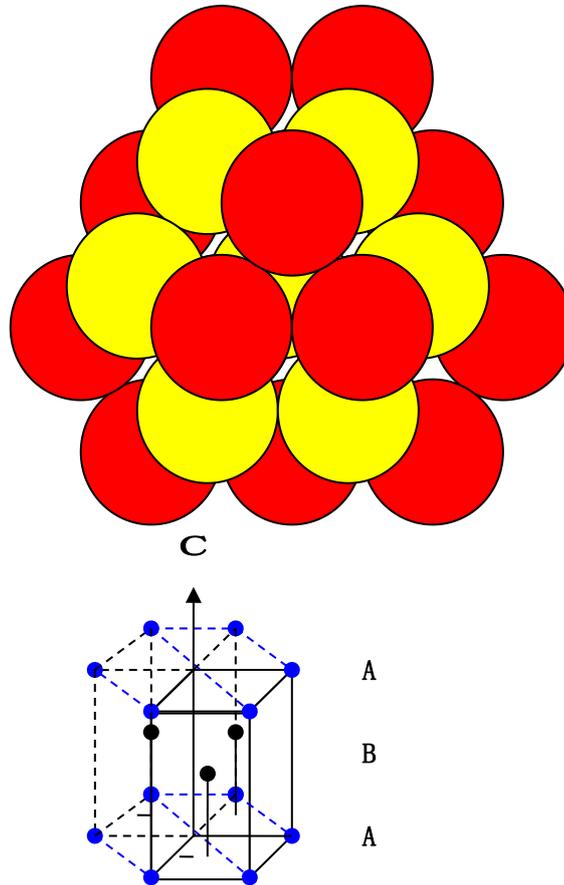
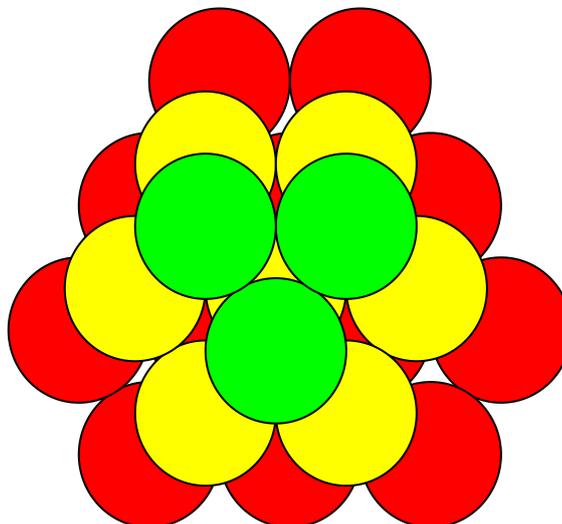


图3-4 简单六方密堆积 \mathcal{A}_3 。

面体空隙之上。这样ABC三层的地位不等价，而再堆积下去只是ABC三层的重复。这样的密堆积构成面心立方密堆积，记为 \mathcal{A}_1 ，如图3-5。



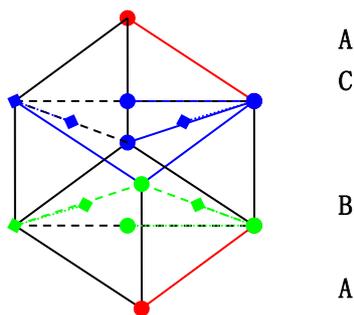


图 3-5 面心立方密堆积 A_3

§ 3-2 空间的对称性

空间的对称性由对称性群表示，分真空的对称性和质空的对称性。

1、真空的对称性

由 § 2 的定义，完美无缺的 \mathcal{A}_1 就是真空。由晶格理论可知， \mathcal{A}_1 的空间群是简单空间群，其任何一对称操作（即空间群元素）都可表示为平移变换和点群元素的乘积。

① \mathcal{A}_1 的平移变换构成全面心平移群 F ：

$$T = T_1 \{E, \Gamma_{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \Gamma_{\frac{1}{2}0\frac{1}{2}}, \Gamma_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}\}, \quad (3-1)$$

其中 T_1 是元胞平移整数格矢 $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ 的变换，即

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = T_1 \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{l} \quad (3-2)$$

$\mathbf{l} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$, n_1, n_2, n_3 为整数， E 是单位元，即恒等变换； $\Gamma_{f_1 f_2 f_3}$ 表示元胞平移分数格矢的变换，即

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \Gamma_{f_1 f_2 f_3} \mathbf{x} = \mathbf{x} + f_1 \mathbf{a}_1 + f_2 \mathbf{a}_2 + f_3 \mathbf{a}_3, \quad (0 < f_1, f_2, f_3 < 1)$$

② \mathcal{A}_1 的点群有两类。一类是以元胞的中心为中心点的点群，另一类是以空隙的中心为中心点的点群。

由于元胞只有一种，故以元胞的中心为中心点的点群是 O_h 。

由于 \mathcal{A}_1 有两种空隙：四面体空隙 T 和八面体空隙 O 。所以，以四面体空隙 T 的中心为中心点的点群是四面体的完全对称性群 T_d ；以八面体空隙 O 的中心为中心点的点群是八面体的完全对称性群 O_h 。

2、质空的对称性

由 § 2 定义，有缺陷的 \mathcal{A}_1 就是质空。而质空有多种，下面分不同情况给予研究。

① 只有一个空穴的质空

如图 2-1(1)所示，以空穴的中心为中心，周围元胞的地位以与空穴的距离的不同而发生了改变。因此，整个质空结构不再具有真空中的平移对称性和点群对称性。但对空穴而言，由于质空无边无际和各向同性，空穴仍具有真空元胞所具有的平移不变性 F 和点群对称性 O_h 。这就是孤立粒子的动量守恒和角动量守恒⁽¹⁹⁾。而其它元胞不再具有这种对称性。

② 有两个和两个以上空穴的质空

如图 3-6 所示，很显然，单个空穴不再具有真空的平移不变性和点群对称性。这意味着单个空穴不再具有动量守恒和角动量守恒，即一定存在相互作用，与现有理论和实验结果相一致。而两个空穴作为一体却具有平移不变性，并且在空间指定了一个特定方向 \mathbf{n} ——两空穴中心连线方向。这意味着空穴系统总动量守恒，在 \mathbf{n} 方向上的角动量守恒，这正是现有理论和实验证实了的。

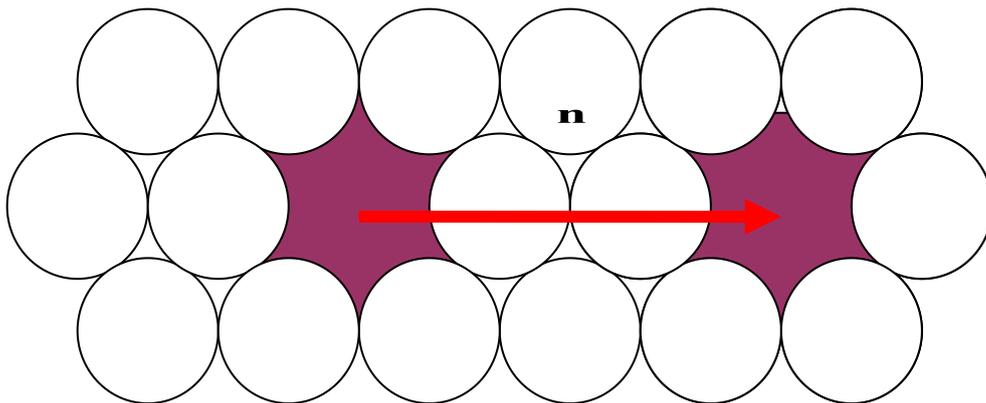


图 3-6 有两个空穴的质空

两个以上空穴的质空结论类似，只是特殊方向 \mathbf{n} 的不同。如三个空穴的情况，其 \mathbf{n} 是三个空穴中心所在平面的法线方向。

③只有空隙中有元胞的质空

如图 2-1(2)所示，其结论等同于只有一空穴的质空。只是以空隙填隙元胞为中心的点群对称性要依据空隙是四面体还是八面体而定。四面体空隙，点群是 T_d ，八面体空隙，点群是 O_h 。有多个空隙的情形，类似于多个空穴的情形。

④空穴和空隙填隙元胞同时存在的质空

如图 2-1(3)所示，它破坏了真空的平移不变性和以空穴中心或空隙填隙元胞中心为中心的点群对称性，在这一点上，其结论等同于两个空穴或两个空隙填隙元胞的情况。但是，这里有一点是特有的。在只有一个空穴的质空中，八面体空隙在空穴周围是对称分布的，并且具有以空穴中心点为中心的空间反演对称性，因此八面体空隙具有 O_h 对称性，而四面体空隙在空穴周围虽是对称分布，但并不具有空间反演对称性。因此，四面体空隙阵具有 T_d 对称性。这说明，元胞被打离元胞格子而进入空隙，如果元胞是进入八面体空隙，则空穴具有（近似的，即不考虑元胞形变） O_h 对称性；如果元胞是进入四面体空隙，则空穴具有 T_d 对称性。也就是说，在空穴和空隙填隙元胞对的质空，空穴和空隙填隙元胞的点群对称性是相同的。这一点非常重要。如果考虑空穴对应着正粒子，空隙填隙元胞对应着反粒子，这一点保证了正反粒子成对出现。

⑤只有元胞格阵变形的质空

如图 2-1(4)所示，真空格阵的所有对称性均被破坏。

§ 3-3 相互作用与粒子

在质空中，例如有一个空穴。那么，由于这个空穴的存在，使得其它元胞和空隙的对称性相对真空发生改变，整个空间的平移不变性发生改变。这样，如果另一个空穴或空隙填隙元胞进入这个质空，它就会感受到一个不同于它在真空中所感受到的环境。我将在下面证明，这些不同感受就是所谓相互作用（即我们现在实验中发现的那种相互作用）。

设一空穴或空隙填隙元胞（即正粒子或反粒子）态为 $\psi\{\mathbf{r}_i\}$ ，其中 \mathbf{r}_i 是以空穴或空隙填隙元胞的中心为中心的空间各元胞或空隙中心的坐标， $i=1, 2, \dots$ 。对于空穴态，在点群 O_h 或 T_d 作用之后，空穴态为

$$\psi'\{\mathbf{r}_i\} = \psi\{T_{\alpha}^{-1}\mathbf{r}_i\} \quad (3-3)$$

其中 $T_\alpha \in O_h$ 或 T_d 。对于空隙填隙元胞有(3-3)式同样结果。

对(3-3)式, 由于元胞点阵中各元胞具有不可分辨性, 在 $T_\alpha (\in T_d$ 或 $O_h)$ 作用下没有物理效应, 即

$$\{ \mathbf{r}_i \} = \{ T_\alpha^{-1} \mathbf{r}_i \} \text{ (物理上)} \quad (3-4)$$

因此, 在真空中, 点群作用后态没有任何变化, 即

$$\Psi' \{ \mathbf{r}_i \} = \Psi \{ \mathbf{r}_i \} \quad (3-5)$$

这样, 由规范理论可知, 相当于 $\Psi \{ \mathbf{r}_i \}$ 没有受到相互作用。

如果态 $\Psi \{ \mathbf{r}_i \}$ 处在质空中, 那么, 以态为中心就不再具有点群 O_h 或 T_d 对称性, 即

$$\{ \mathbf{r}_i' \} = \{ T^{-1} \mathbf{r}_i \} \neq \{ \mathbf{r}_i \}, \quad (T_\alpha \in O_h \text{ 或 } T_d) \quad (3-6)$$

如果要求 $\{ \mathbf{r}_i' \} = \{ \mathbf{r}_i \}$, 那么对称操作就不能是 $T_\alpha (\in O_h$ 或 $T_d)$ 。要使其相同, 其操作是, 对每个 \mathbf{r}_i , 在 T_α 作用后再做些调整。譬如, \mathbf{r}_i 在 T_α 作用后角度转得大了些, 为了使 $\{ \mathbf{r}_i' \} = \{ \mathbf{r}_i \}$, 那么就要求再将 $T_\alpha^{-1} \mathbf{r}_i$ 转回一角度。这相当于

$$R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha^{-1} \mathbf{r}_i \quad (3-7)$$

其中 $R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) \in SO(3, R)$; $\gamma_\alpha^i (i=1, 2, 3)$ 是 $SO(3, R)$ 群的三个参数。在直角坐标 (x, y, z) 之中, 它们分别是绕三个轴 (x, y, z) 转动 $\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3$ 角度, 而

$$R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) = R_z(\gamma_\alpha^3) R_y(\gamma_\alpha^2) R_x(\gamma_\alpha^1)。$$

γ_α 的下标 (标志这个角度是与相应的群 T_α 作用有关的)。又譬如, \mathbf{r}_i 在 T_α 作用后, 变得与原来位置的距离大了点, 这可以通过让(3-7)式中 γ_α^i 取复数: $\gamma_\alpha^i = \xi_\alpha^i + i\eta_\alpha^i$ ($\xi_\alpha^i, \eta_\alpha^i \in R$) 来实现。另外, 很明显, γ_α^i 是依赖于 \mathbf{r}_i 的, 即 $\gamma_\alpha^i = \gamma_\alpha^i(\mathbf{r}_i)$ 。

注意两点: ①所谓距离, 就是 \mathbf{r}_i 的模 $|\mathbf{r}_i|$ 。②在上面的讨论中, 我们没有考虑元胞的形变。如果考虑元胞的形变, 则要求我们至少引入一标量场 $l(\mathbf{r}_i)$ 。这在 §6 构造相互作用时非常有用, 相当于 Higgs 场⁽³⁻⁵⁾。

至此, 我们分析质空中元胞点阵的所有可能变化, 找到了态 $\Psi \{ \mathbf{r}_i \}$ 在质空中的不变操作

$$S_\alpha = R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha^{-1} \quad (3-8)$$

其中 $T_\alpha \in O_h$ 或 T_d ; $R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) \in SO(3, C)$, $\gamma_\alpha^i = \gamma_\alpha^i(\mathbf{r}_i) \in C$, $i=1, 2, 3$ 。

下面我先证明由(3-8)式 S_α 组成的集合

$$S = \{ S_\alpha(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) \}$$

是一局部李群。

(1) S 是群

证: 设 $S_\alpha, S_\beta \in S$, 则

$$S_\alpha S_\beta = R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha^{-1} R(\gamma_\beta^1, \gamma_\beta^2, \gamma_\beta^3) T_\beta^{-1}$$

$$\text{因为: } T_\alpha^{-1} R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha \in SO(3, C)$$

$$T_\alpha^{-1} T_\beta^{-1} \in O_h \text{ (或 } T_d)$$

则 $S_\alpha S_\beta \in S$, 满足乘法封闭性。显然 S 是群。

(2) $SO(3, C)$ 是 S 的正规子群

证: 因为任意 $T_\alpha \in O_h$ 或 T_d , 有

$$(T_\alpha^{-1})^{-1} R(\gamma_\alpha^1, \gamma_\alpha^2, \gamma_\alpha^3) T_\alpha^{-1} \in SO(3, C)$$

$$\text{则 } (T_\alpha^{-1})^{-1} SO(3, C) T_\alpha^{-1} = SO(3, C)$$

故 $SO(3, C)$ 是 S 的正规子群。

(3) S 是 $SO(3, C)$ 与 O_h (或 T_d) 的直积

证: 因为 $S = SO(3, C)T$, (T 为 O_h 或 T_d)

$$SO(3, C) \cap T = R(0, 0, 0)E$$

则 S 是 $SO(3, C)$ 与 T 的直积。因此 T 也是 S 的正规子群。

(4) S 与 $SO(3, C)$ 局部同构, 因为 T 是离散子群⁽²⁰⁾。

(5) 因为 $SO(3, C)$ 是局部李群, 故 S 也是局部李群。

至于 S 的整体性质, 由连续群定理⁽²⁰⁾可知它是紧致的完全不连通李群。

由李群理论, S 的生成元

$$\left(\frac{\partial S_\alpha \vec{r}_n}{\partial \gamma_\alpha^i}\right)_{\gamma_\alpha^i=0} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} = \left[\left(\frac{\partial R(\gamma_\alpha^i)}{\partial \gamma_\alpha^i}\right)_{\gamma_\alpha^i=0} \vec{r}_n \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n} \right] T_\alpha^{-1} \quad (3-9)$$

$$= (I_\alpha^i)_n T_\alpha \quad (3-9')$$

其中 $i = 1, 2, 3$, n 是第 n 个元胞,

$$(I_\alpha^i)_n = \left(\frac{\partial R(\gamma_\alpha^i)}{\partial \gamma_\alpha^i}\right)_{\gamma_\alpha^i=0} \vec{r}_n \frac{\partial}{\partial \vec{r}_n}$$

是 $SO(3, C)$ 群的生成元。这里, 因为映射 $f: T_\alpha^{-1} \rightarrow T_\alpha$ 是一一对应的同构映射, 故可以将 (3-9) 式中的 T_α^{-1} 换成 (3-9') 式中的 T_α 。

故, 态 $\Psi\{\mathbf{r}_n\}$ 在 S 群作用下变成 $\Psi'\{\mathbf{r}_n\}$,

$$\Psi'\{\mathbf{r}_n\} = \exp[-i\gamma_\alpha^i (I_\alpha^i)_n T_\alpha] \Psi\{\mathbf{r}_n\} \quad (3-10)$$

将 $\{\mathbf{r}_n\}$ 记为 (\mathbf{r}) , 则 (3-10) 式成为

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \exp[-i\Theta^\alpha(\mathbf{r}) T_\alpha] \Psi(\mathbf{r}) \quad (3-11)$$

其中 $\Theta^\alpha(\mathbf{r}) = \gamma_\alpha^i (I_\alpha^i)_n$, $T_\alpha \in T$ 。这里 $\Theta^\alpha(\mathbf{r})$ 是一个算符, 当它作用到 $\Psi(\mathbf{r})$ 之后, 就变成了本征值 $\theta^\alpha(\mathbf{r})$ 。因此

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \exp[-i\theta^\alpha(\mathbf{r}) T_\alpha] \Psi(\mathbf{r}) \quad (3-12)$$

考虑到质空是变化的, 我们可以引入一描述这种变化的参数 t , 则对任一确定的 (\mathbf{r}, t) , 有

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\theta^\alpha(\mathbf{r}, t) T_\alpha] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (3-13)$$

在下一节中这个参数 t 就是时间。

(3-13) 式表明物理系统在这个变换下不变。熟悉规范理论的读者马上就知道, (3-13) 式代表以 T_α 为生成元的定域规范变换。

对于 (3-13) 式所描述的规范理论, 下面唯一的问题是确定 T_α 满足的代数关系, 由附录 A 表 A-2 可知, 任意 $T_\alpha, T_\beta \in T$, 有

$$[T_\alpha, T_\beta] = C_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma, \quad T \in T \quad (3-14)$$

其中 $[T_\alpha, T_\beta] = T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha$ 。 $C_{\alpha\beta\gamma}$ 是完全由群 O_h (或 T_d) 决定的常数, 这表明 O_h (或 T_d) 的群代数是李代数。余下的问题是: O_h 和 T_d 到底是怎样的李代数。

非常幸运, O 群代数可以分解成如下几个半单李代数之直和:

$$A(O) = 5A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2' \quad (3-15)$$

$$\text{同理, } A(T_d) = 5A_0^d \oplus A_1^d \oplus A_2^d \oplus A_2'^d \cong A(O) \quad (3-16)$$

$$A(O_h) = A(O^+) \oplus A(O^-) \quad (3-17)$$

这表明 T_d 群代数与 O 群代数同构, 可以分解成 5 个 A_0 李代数 (对应 $U(1)$ 群), 一个 A_1 李代数 (对应 $SU(2)$ 群) 和两个不同的 A_2 李代数 (对应两个不同的 $SU(3)$ 群) 的直和, 而 O_h 群代数可以分解成两支, $A(O^+)$ 和 $A(O^-)$, 每支都是与 T_d 群代数同构但不相同的群代数。详细讨论见附录 A。

用 Y-M 局域规范场论的观点, 这相当于说: 对于 O_h 规范场, 等价于 $SU(3') \otimes SU(3) \otimes SU(2)$

$\otimes SU(1)$ 群加空反演的“内部空间”对称性。对 T_d 规范场, 等价于 $SU(3') \otimes SU(3) \otimes SU(2) \otimes SU(1)$ 群的“内部”对称性, 但没有空间反演对称性。如果将 $SU(3)$ 对应于弱电相互作用, $SU(3')$ 对应于强相互作用, $SU(2)$ 对应于自旋相互作用, 那么我们就在一个统一的框架 (O_h 规范场或 T_d 规范场) 来描述这些相互作用, 也就是说, 我统一了强、弱、电相互作用 (详见 § 6)。而粒子则是 O_h 或 T_d 群代数的表示。如果将 $SU(2)$ 对应自旋, $SU(3)$ 对应味, $SU(3')$ 对应色, 就可以一揽子构造所有粒子! (详见 § 5)。经后三节的详细研究, 事实正如所料。这样, 我将相互作用 (包括引力相互作用) 和粒子的结构与时空结构最紧密联系起来!

以下的问题是从 (3-13) 出发, 首先构造群代数的表示, 然后由 (3-13) 式给出相互作用的具体形式并与实验比较。在进行这些工作之前, 先建立时间概念。

§ 4 时间及时空的对称性

描述物理过程的持续性的量叫时间。比较两个物理过程的持续性, 即比较这两个物理过程的时间, 就必须先选定一个比较的标准过程, 将要求比较的两个过程的持续性分别与这个标准过程的持续性进行比较, 从而达到比较两个物理过程持续性的目的。

§ 4-1 运动过程、参照系

真空格子是未变形的元胞所构成的面心立方格阵 \mathcal{A}_1 。因此, 元胞之间是等价的。如果一个空穴或是一空隙填隙元胞进入这个真空 (这里的“进入”可以理解为: 有一个空穴或一空隙填隙元胞的质空等价于这个空穴或空隙填隙元胞进入真空之后的结果), 以这个空穴或空隙填隙元胞的中心为中心的空间平移不变性和点群对称性依然存在。这预示着一类运动的存在: 保持以这个中心为中心的平移不变性和点群不变性 (即 O_h 或 T_d), 我把这类运动叫做匀速运动 (或静止)。这个空穴或空隙填隙元胞 (对应某个粒子) 所处的状态叫做匀速运动状态 (或静止状态)。因此, 在真空中, 处于匀速运动状态的空穴或空隙填隙元胞自己不会感受到任何变化, 它自己并不能够用某种自己的不同状态来描述自己的过程 (即不同状态的变化序列)。从而, 单个空穴或空隙填隙元胞自身无法描述自身的过程。

如果空穴或空隙填隙元胞进入到质空, 以空穴或空隙填隙元胞中心为中心的平移不变性和点群不变性不再成立, 即当平移或以点群转动之后空穴或空隙填隙元胞就会感受到一个不同的环境。因此, 空穴或空隙填隙元胞就可以通过判定周围环境的变化来判定自己是否在质空中运动 (即运动有了定义)。这样看来, 质空为空穴或空隙填隙元胞描述自身运动提供了一个参照系。注意到, 我们这里并没有对质空提出特别的要求, 也就是任何质空都可以做为参照系, 即参照系就是质空。在这个参照系中, 可以引入一套坐标, 空穴或空隙填隙元胞在其中就有了位置、方位等概念。通过测定位置、方位的变化就可以判定是否运动。

现在来看两个空穴或空隙填隙元胞 A、B 进入质空 S 后的情况。这时, 空穴或空隙填隙元胞 A 感受到的质空是 B 进入质空 S 之后形成的质空记为 $S_B = S + B$ 。同理, B 所感受到的质空是 $S_A = S + A$, 很明显, 这两个质空 S_A 与 S_B 原则上是不同的, 即描述 A 与 B 的参照系是不同的。如果 A 和 B 对质空的影响不太大, 那么 $S_A \approx S_B \approx S$, 即我们可以用一个统一的参照系 S 来描述 A 与 B 的运动。

由于空穴或空隙填隙元胞进入质空之后 (即在某一参照系中) 就不再具有真空中的平移不变性和点群不变性, 所以, 空穴或空隙填隙元胞的运动原则上就不会再是匀速运动 (或静止) 状态。如果空穴或空隙填隙元胞进入质空后仍具有空间平移不变性和点群不变性, 那么空穴

或空隙填隙元胞的运动就是匀速运动(或静止)状态,这时质空相当于在真空中确定了一套坐标。我们称这种质空叫做惯性系。很明显,以上做法只是一种近似。所以,严格的惯性系是不存在的。

§ 4-2 时间的定义

有了参照系,就可以描述空穴或空隙填隙元胞的过程。因此就有了空穴或空隙填隙元胞运动状态的序列——过程。这给我们提出:如何去描述进而比较这两个过程。在参照系 S 中,运动序列——过程可以用轨迹来描述,而轨迹就是在 S 系中空穴或空隙填隙元胞所经过的元胞位置的集合。

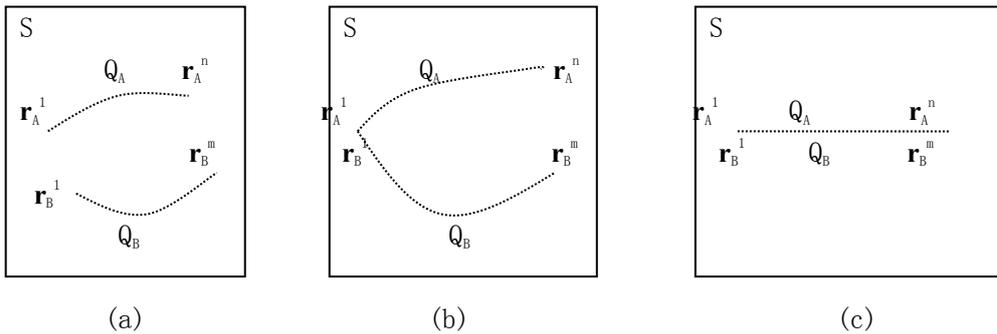


图 4-1 两轨迹的关系

例如,空穴或空隙填隙元胞 A 的轨迹记为 $Q_A = \{\mathbf{r}_A^i, i=1, 2, \dots, n\}$, 同理,空穴或空隙填隙元胞 B 的轨迹记为 $Q_B = \{\mathbf{r}_B^i, i=1, 2, \dots, m\}$, Q_A 与 Q_B 的关系可以有三种,如图 4-1。

(a) $Q_A \cap Q_B = \emptyset$; (b) $Q_A \cap Q_B \neq \emptyset$, 但 $Q_A \neq Q_B$, 即相交; (c) $Q_A \cap Q_B = Q_A$ 当 $m \geq n$,

$$Q_A \cap Q_B = Q_B \text{ 当 } n \geq m$$

在这里我们能看到的只有两点:(1)轨迹是否相同;(2)是否会面(即碰在一起)的情况。如情况(a)从未碰到一起,情况(b)有可能会面,但不能肯定。我们将会面叫做同时。

对任一轨迹 $Q = \{\mathbf{r}^i, i=1, 2, \dots, n\}$, 我们总可以做一个一一对应的连续映射 t , 使 $t: Q \rightarrow T \in \mathbb{R}$ 。其中 T 一定是 \mathbb{R} 上的一闭集。这样 $t(\mathbf{r}^i) = t^i \in T \subset \mathbb{R}$, 即相当于给轨迹 Q 中任一空间点 \mathbf{r}^i 一个参数 t^i , 这时 \mathbf{r}^i 可以记为 $\mathbf{r}^i(t^i)$ 。由于对映射 t 的要求是一一对应连续映射, 故此这种映射是很多的。对于不同的轨迹 Q_A 与 Q_B , 它们分别都可以引入二映射 t_A 与 t_B 满足上述条件。这样, 轨迹 Q_A 上每点可记为 $\mathbf{r}_A^i(t_A^i)$, 轨迹 Q_B 上每点可记为 $\mathbf{r}_B^i(t_B^i)$, 其中 $t_A^i, t_B^i \in \mathbb{R}$, 既然 t_A^i, t_B^i 均是 \mathbb{R} 上的数, 我们就可以比较它们的大小。然而, 由于映射 t_A 与 t_B 有不确定性, 故此在未选定映射 t_A 与 t_B 之前, 不可能进行这种比较。因此, 如果想比较 t_A 和 t_B 的大小, 就势必先确定 t_A^i 与 t_B^i 。如果希望对任意两过程都能进行上述比较, 最简便的方法是确定一种具有唯一性的选择映射 t 的方法。这样唯一选定的 t 就称之为时间。 $\mathbf{r}^i(t^i)$ 称为事件。如果两个事件 $\mathbf{r}_A^i(t^i)$ 与 $\mathbf{r}_B^i(t^i)$ 的时间相等, 即 $t_A^i = t_B^i$, 则称为同时。注意这里的同时是依赖于映射 t 的选择的, 而前面定义会面为同时则是不依赖于映射 t 的选择。同样, 我们可以定义平均速度 $\bar{\mathbf{v}}$ 和瞬时速度 \mathbf{v} 为

$$\bar{\mathbf{v}}(\Delta \bar{\mathbf{r}}^i(t^i)) \equiv \frac{\Delta \bar{\mathbf{r}}^i}{\Delta t^i} = \frac{\bar{\mathbf{r}}^{i+j} - \bar{\mathbf{r}}^i}{t^{i+j} - t^i} \quad (4-3)$$

$$\vec{V}(\vec{r}^i(t^i)) \equiv \frac{\vec{r}^{i+1} - \vec{r}^i}{t^{i+1} - t^i} \quad (4-4)$$

众所周知,对于晶格结构物质,都存在晶格元胞振动而产生的晶格波(对原子晶体是光波和声波),而且这个晶格的波速是完全决定于晶格结构的⁽²¹⁾。真空和质空是元胞的空间点阵结构,最自然的想法是它能产生和传播晶格波,而且这晶格波的波速只决定于真空或质空结构。这里波速所用的定义是(4-4)式。

考虑到质空是参照系。在一般参照系中,由于真空中的平移不变性和点群对称性(O_n 或 T_n)不再成立,即质空结构不均匀,为此决定于质空结构的波速也不会均匀。但是,当质空是惯性系时(见前面定义),真空中的对称性依然成立。因此,在惯性系中,元胞晶格波速各向同性且处处为恒值(当选定一种时间定义)。因此,晶格波通过一个元胞的过程为我们提供了一个在选定惯性系中处处一致的标准过程。其它过程的时间定义可以通过与这标准过程确定的比较方法得到确定。

对晶格波,它在惯性系中一定是沿空间直线传播。其轨迹 $Q_p = \{ \mathbf{r}_p^i, i=0, 1, 2, \dots, n \}$,其中 \mathbf{r}_p^i 是晶格波依次经过的元胞中心的坐标,满足方程

$$\mathbf{r}^j - \mathbf{r}^i \propto \mathbf{r}^k - \mathbf{r}^i, \text{ 对任意 } k > i, j > i \quad (4-5)$$

我们选定一种自然的映射 t ,满足

$$t_p^i \equiv t^i(\mathbf{r}_p^i) = t_0^i, \quad (4-6)$$

其中 t_0 为一个只取决于惯性系的数。由速度定义(4-3)、(4-4)式,

$$\vec{V} = \vec{V} = \frac{\vec{r}^{i+1} - \vec{r}^i}{t^{i+1} - t^i} = \frac{l_0}{t_0} \hat{\mathbf{e}} \quad (4-7)$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}$ 为晶格波传播方向的单位矢量。 l_0 为这个惯性系中元胞的直径。令

$$\frac{l_0}{t_0} = c \quad (4-8)$$

即 c 为晶格波速。从(4-8)式可知,常数 t_0 为这个惯性系中晶格波通过一个元胞所需时间。

在惯性系 S 中,我们将晶格波的传播选为标准过程,而将 t_0 选为时间单位。下面来选择一种其它过程与其比较的方法。设任意空穴或空隙填隙元胞 A 过程的轨迹 $Q_A = \{ \mathbf{r}_A^i, i=1, 2, \dots, n \}$,在 Q_A 中,任意两相邻的位置 \mathbf{r}_A^{i+1} 与 \mathbf{r}_A^i 可以决定一个方向 $\hat{\mathbf{e}}$,即 $\mathbf{r}_A^{i+1} - \mathbf{r}_A^i = l_0 \hat{\mathbf{e}}$,设有一格波在 \mathbf{r}_A^i 位置与 A 会面沿 $\hat{\mathbf{e}}$ 方向传播,并总可以找到 $\hat{\mathbf{e}}$ 方向上一位置 M ,与 \mathbf{r}_A^i 相差 m 个格子,在 M 处晶格波被反射回来并在 \mathbf{r}_A^{i+1} 处再次与 A 会面。选过程 Q_A 的映射 t_A 为

$$\Delta t_A^i = t_A^{i+1} - t_A^i = (2m-1)t_0, \quad (4-9)$$

t_A^i 为时间,即 A 通过这个元胞的时间等于晶格波与 A 两次会面的时间。从(4-9)式定义可以看出,对于不同的空穴或空隙填隙元胞过程, m 可以不同,意味着(4-4)式定义的速度

$$\vec{V} = \frac{l_0}{(2m-1)t_0} \hat{\mathbf{e}} \quad (4-10)$$

的不同。这样我们通过(4-9)式给 Q_A 上每一位置一个时间。

从以上考虑可知,对一般参照系(质空),是不可能找到这样适合于整过空间的时间定义,那时,时间最多只在局部空间定义。

物理中元胞格波是否存在呢?现在实验表明,光波可以被视为一种元胞格波。

§ 4—3 格波波速不变与狭义相对论

在惯性系中，由于平移不变性，做惯性运动就要求这个运动轨迹 $Q = \{\mathbf{r}^i, i=1, 2, \dots, n\}$ 保持平移不变。这就等同于要求 Q 中任意两个相邻的元胞位置同序之差相等，即

$$\mathbf{r}^{i+j} - \mathbf{r}^i \propto \mathbf{r}^{j+1} - \mathbf{r}^j, \text{ 对任意 } \mathbf{r}^{i+j}, \mathbf{r}^i, \mathbf{r}^{j+1}, \mathbf{r}^j \quad (4-11)$$

根据 (4-9) 时间的定义和 (4-4) 式速度的定义，惯性运动满足 (4-11) 式是匀速直线运动或静止 (对于静止, $Q = \{\mathbf{r}^i | \mathbf{r}^i = \mathbf{r}^j, \text{ 对任意 } i, j\}$)

这就是说:

(1) 在惯性系中，空隙或空隙填隙元胞 A 有两种等价的运动状态：匀速运动和静止。这表明使 A 匀速运动的惯性系 S 和使 A 静止的惯性系 S' 是等价的，即不同惯性系平权。

(2) 由于每个惯性系的空间结构与真空相同，在每个惯性系中决定于空间结构的格波波速应与真空格波波速相同。因此，不同惯性系中元胞晶格波速相等且为 c 。

以上第一条结论就是相对性原理，第二条是光速不变原理。因此，在我们定义的时空中，爱因斯坦狭义相对论依然成立。这表明我们的时空概念是合理的。

值得说明的是：(1)历史上曾经有过以太的概念，说光波是以太介质的波动。在那里，物质与以太是两种不同的物质，所以取决于以太结构的光波波速是以太介质静止系的波速，它一定随不同惯性系相对运动的观者所看到以太的不同运动速度而改变。因此光速不变就否定了以太的存在⁽²²⁾。而我们这里格波波速只决定于惯性系空间结构，因为惯性系与真空结构相同，则不同惯性系格波波速相同。(2)对两个不同的惯性系 S 与 S' ，均可分别定义元胞直径 l_0 与 l'_0 ，格波通过一个元胞的时间 t_0 与 t'_0 。因为格波波速不变有

$$\frac{l_0}{t_0} = \frac{l'_0}{t'_0} = c \quad (4-12)$$

这表明，允许长度单位 l_0 和时间单位 t_0 在不同惯性系中有不同值。但这两个惯性系中的数值直接比较是没意义的，只有回到同一个坐标系中才有意义。

§ 5 粒子构造

由于时空的对称性，使得粒子具有 (3-13) 式形式的规范对称性。因此粒子应是生成元 T_α 的表示。单个空穴的点群对称性是 O_h 或 T_d ，它对应正粒子；四面体空隙填隙元胞的对称性为 T_d ，八面体空穴的对称性为 O_h ，它们分别对应两类反粒子。结合 § 3 节的结果，即正反粒子满足的对称性相同。结果是： O_h 群代数的表示是我们熟知的 Gell-Mann(uds) 夸克及其所构成的粒子，而 T_d 群代数的表示是我们所知全部 18 个轻子和由所谓“cvt”夸克组成的强子，所以，我们只要分别考虑 O_h 和 T_d 群代数的表示，统一给出正反粒子；而全部规范粒子都可在下节讨论 (3-13) 式相互作用时一并得到。

§ 5—1 O_h 群代数的表示

I、 O_h 群代数的表示

由附录 A 知， O_h 群包括 24 个 T_α ， O_h 群代数可以分解成 5 个 A_0 李代数，一个 A_1 李代数和二个 A_2 李代数之直和，即

$$A(0) = 5A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2' \quad (5-1)$$

生成元 T_α 与标准基的关系如下:

(1) 5 个 A_0 生成元为 X_i , $i=1, 2, 4, 4, 5$, 均为同一类群元的和:

$$\begin{aligned} X_1 &= T_0 = E, \\ X_2 &= T_1 + T_2 + T_3 \\ X_3 &= T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} \\ X_4 &= T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16} + T_{17} \\ X_5 &= T_{18} + T_{19} + T_{20} + T_{21} + T_{22} + T_{23} \end{aligned} \quad (5-2)$$

(2) A_1 生成元 A , E_\pm 为

$$\begin{aligned} A &= i \frac{\sqrt{3}}{24} (T_4 + T_5 + T_6 + T_7 - T_8 - T_9 - T_{10} - T_{11}) \\ E_\pm &= \frac{\sqrt{3}}{4} [2(T_{12} + T_{17} + T_{20} + T_{23}) - (T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21}) - (T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22})] \\ &\quad \pm i \frac{3}{4} [(T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21}) - (T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22})] \end{aligned} \quad (5-3)$$

(3) A_2 生成元为 H_1 , H_2 , $E_{\pm\alpha}$, $E_{\pm\beta}$, $E_{\pm(\alpha+\beta)}$,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[T_1 - T_2 + \frac{1}{2} [(T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right], \\ H_2 &= \frac{1}{32} \left\{ \begin{aligned} &2T_2 - T_1 - T_3 \\ &+ \frac{1}{2} [2(T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}) - (T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \end{aligned} \right\}, \\ E_\alpha &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 + T_5 - T_6 - T_7) + (T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23})], \\ E_{-\alpha} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}) + (T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23})], \\ E_\beta &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 - T_6 + T_7) - (T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22})], \\ E_{-\beta} &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}) - (T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22})], \\ E_{+(\alpha+\beta)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 + T_6 - T_7) + (T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21})] \\ E_{-(\alpha+\beta)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}) + (T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21})] \end{aligned} \quad (5-4)$$

(4) A_2' 的生成元为 H_1' , H_2' , $E_{\pm\alpha}'$, $E_{\pm\beta}'$, $E_{\pm(\alpha+\beta)}'$,

$$\begin{aligned} H_1' &= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[T_1 - T_2 - \frac{1}{2} [(T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right] \\ H_2' &= \frac{1}{32} \left\{ \begin{aligned} &2T_2 - T_1 - T_3 \\ &- \frac{1}{2} [2(T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}) - (T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \end{aligned} \right\}, \\ E_\alpha' &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 + T_5 - T_6 - T_7) - (T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23})], \end{aligned} \quad (5-5)$$

$$E'_{-\alpha} = \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}) - (T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23})],$$

$$E'_{\beta} = -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 - T_6 + T_7) + (T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22})],$$

$$E'_{-\beta} = -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}) + (T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22})],$$

$$E'_{+(\alpha+\beta)} = \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 + T_6 - T_7) - (T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21})],$$

$$E'_{-(\alpha+\beta)} = \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}) - (T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21})].$$

一个粒子应同时是这 24 个生成元的表示，也即同时是 X_1, A_1, A_2, A_2' 的表示，下面我们分别讨论。

(1) A_1 的表示。 A_1 是 $SU(2)$ 李群的代数，其秩为 1，有一个量子数 S ，我们将它称为自旋，则不可约表示如表 5-1，这表明粒子应该是自旋为半整数的 Dirac 粒子。

表 5-1 自旋表示

阶	表示 (S)	维数
0	0	1
1	1/2, -1/2	2
.....
1	1/2, (1-1)/2, ..., 0, ..., -(1-1)/2, -1/2	1+1

(2) A_2 的表示。 A_2 是 $SU(3)$ 李群的代数，秩为 2，有两个量子数 Y, I_3 ，基本表示为 3 维，记为 (uds)，其量子数为表 (5-2) 所示：

表 5-2 (uds) 夸克的量子数

	Y	I_3
u	1/3	1/2
d	1/3	-1/2
s	-2/3	0

这与 Ge11-mann 夸克理论的三味相同。其它多重表示完全等同于 Ge11-mann 夸克理论，在此不再重复。

(3) A_2' 的表示。 A_2' 是另外一个 $SU(3)$ 李群的代数，秩为 2，有两个不同于量子数 Y, I_3 的 Y^c, I_3^c ，其基本表示也为 3 维，记为 (RBG)，其量子数为表 (5-3) 所示。

表 5-3 (RBG) 的量子数

	Y^c	I_3^c
R	1/3	1/2
B	1/3	-1/2
G	-2/3	0

这与 Ge11-mann 夸克理论的三色理论完全一致。进一步的结论与 Ge11-mann 夸克理论相同，就不在此重复⁽²²⁾。

(4) 5 个 A_0 的表示。除 $T_0=E$ 是单位元之外，其它四个都是一个生成元的代数，其表示可能对应于整体量子数的态，如总自旋 S ，重子数等。

从上面 4 个部分的讨论可知， O 群代数的表示——粒子带有自旋 S ，味(uds)、色(RBG)和整体量子数等，但实际的空穴态的对称性比 O 群代数高，满足 O_h 群代数。

II O_h 群代数的表示

从附录 A 可以看出， O_h 群代数可以分解为二群代数之直和：

$$A(O_h) = A(O^+) \oplus A(O^-), \quad (5-6)$$

$$\text{其中 } O^+ = \{T_i P_+, T_i \in O\} \quad (5-7)$$

$$O^- = \{T_i P_-, T_i \in O\} \quad (5-8)$$

$$P_{\pm} = (1 \pm \sigma) / 2, \quad (\sigma \text{ 是空间反演操作}) \quad (5-9)$$

$$\text{由于 } P_{\pm}^2 = P_{\pm} \quad (5-10)$$

所以 P_{\pm} 是手征投影算子，在 Dirac 表象中其表示可以取为

$$P_{\pm} = (1 \pm \gamma_5) / 2 \quad (5-11)$$

其中 γ_5 是 Dirac 矩阵 $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ 。

从(5-7)、(5-8)可知， $A(O^+)$ 、 $A(O^-)$ 均与 $A(O)$ 同构。这样，(5-6) 式表明群代数的表示分为两类：一类是 O^+ 群代数的表示，

$$\psi^+ = (1/2) (1 + \gamma_5) \psi \equiv \psi_L \quad (5-12)$$

称为左旋态，除了因子 $(1 + \gamma_5) / 2$ 之外，与 O 群代数的表示相同。另一类是 O^- 的表示：

$$\psi^- = (1/2) (1 - \gamma_5) \psi \equiv \psi_R \quad (5-13)$$

称为右旋态，除了因子 $(1 - \gamma_5) / 2$ 外，与 O 群代数的表示相同。

到此我们完全从 O_h 群代数的表示出发一揽子构造出由(uds) 夸克所构成的所有粒子。因为该理论是与现有 Gell-mann 三夸克理论一致的，所以，它与现有实验完全相符。

§ 5-2 T_d 群代数的表示

由附录 A 知， T_d 群代数与 O 群代数同构，也可以分解为 5 个 A_0 李代数，一个 A_1 李代数和二个 A_2 李代数之直和。分解后各个李代数的标准基与 $T_i \in T_d$ 之间的关系为

(1) 5 个 A_0 生成元为 X_i^d ， $i=1, 2, 4, 4, 5$ ，均为同一类群元的和：

$$\begin{aligned} X_1^d &= T_0 = E, \\ X_2^d &= T_1 + T_2 + T_3 \\ X_3^d &= T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} \\ X_4^d &= (T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16} + T_{17}) \sigma \\ X_5^d &= (T_{18} + T_{19} + T_{20} + T_{21} + T_{22} + T_{23}) \sigma \end{aligned} \quad (5-14)$$

(2) A_1 生成元 A^d ， E_{\pm}^d 为

$$\begin{aligned} A^d &= i \frac{\sqrt{3}}{24} (T_4 + T_5 + T_6 + T_7 - T_8 - T_9 - T_{10} - T_{11}) \\ E_{\pm}^d &= \frac{\sqrt{3}}{4} [2(T_{12} + T_{17} + T_{20} + T_{23}) - (T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21}) - (T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22})] \sigma \\ &\pm i \frac{3}{4} [(T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21}) - (T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22})] \sigma \end{aligned} \quad (5-15)$$

(3) A_2 生成元为 H_1^d ， H_2^d ， $E_{\pm\alpha}^d$ ， $E_{\pm\beta}^d$ ， $E_{\pm(\alpha,\beta)}^d$ ，

$$H_1^d = \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[T_1 - T_2 + \frac{1}{2} \sigma [(T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right],$$

$$\begin{aligned}
H_2^d &= \frac{1}{32} \left\{ 2T_2 - T_1 - T_3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma [2(T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}) - (T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right\}, \\
E_{\alpha}^d &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 + T_5 - T_6 - T_7) + \sigma(T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23})], \\
E_{-\alpha}^d &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}) + \sigma(T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23})], \\
E_{\beta}^d &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 - T_6 + T_7) - \sigma(T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22})], \\
E_{-\beta}^d &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}) - \sigma(T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22})], \\
E_{+(\alpha+\beta)}^d &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 + T_6 - T_7) + \sigma(T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21})] \\
E_{-(\alpha+\beta)}^d &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}) + \sigma(T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21})]^\circ
\end{aligned} \tag{5-16}$$

(4) A_2' 的生成元为 $H_1^{d'}$, $H_2^{d'}$, $E_{\pm\alpha}^{d'}$, $E_{\pm\beta}^{d'}$, $E_{\pm(\alpha+\beta)}^{d'}$,

$$\begin{aligned}
H_1^{d'} &= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[T_1 - T_2 - \frac{1}{2} \sigma [(T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right] \\
H_2^{d'} &= \frac{1}{32} \left\{ 2T_2 - T_1 - T_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sigma [2(T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}) - (T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right\}, \\
E_{\alpha}^{d'} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 + T_5 - T_6 - T_7) - \sigma(T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23})], \\
E_{-\alpha}^{d'} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}) - \sigma(T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23})], \\
E_{\beta}^{d'} &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 - T_6 + T_7) + \sigma(T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22})], \\
E_{-\beta}^{d'} &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}) + \sigma(T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22})], \\
E_{+(\alpha+\beta)}^{d'} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 + T_6 - T_7) - \sigma(T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21})], \\
E_{-(\alpha+\beta)}^{d'} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}) - \sigma(T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21})]^\circ
\end{aligned} \tag{5-17}$$

比较 (5-2) ~ (5-5) 与 (5-14) ~ (5-17) 式, 虽然它们的代数结构相同, 但生成元的物理意义是不同的, 所以, T_d 是另一套生成元, 其表示是另一套不同于 O_6 群代数的表示, 从而与 O_6 群代数的表示 (uds) 类夸克粒子不同, 下面我们依次构造 T_d 群代数的表示。

I、 T_d 群代数的基本表示

(1) A_1 李代数的表示

比较 (5-3) 式与 (5-15) 式, 可知

$$A^d = A, \quad E_{\pm}^d = \sigma E_{\pm} \tag{5-18}$$

在 O 群代数中, 已知 (A, E_{\pm}) 构成一个 A_1 李代数, 它的表示可以记为 $|jm\rangle$, 则有

$$A|jm\rangle = m|jm\rangle \tag{5-19}$$

$$E_{\pm} |jm\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |jm\rangle, \quad (5-20)$$

又知 (A^d, E_{\pm}^d) 也构成一个 A_1 李代数, 它的表示也可以表示为 $|jm\rangle^d$, 则有

$$A^d |jm\rangle^d = m |jm\rangle^d \quad (5-21)$$

$$E_{\pm}^d |jm\rangle^d = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |jm\rangle^d, \quad (5-22)$$

将 (5-18) 式代入 (5-12) 和 (5-22) 式得

$$A |jm\rangle^d = m |jm\rangle^d, \quad (5-23)$$

$$E_{\pm} (\sigma |jm\rangle^d) = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |jm\rangle^d, \quad (5-24)$$

这样, 比较 (5-19) ~ (5-20) 式与 (5-23) ~ (5-24) 式得,

$$|jm\rangle^d = |jm\rangle, \quad (5-25)$$

$$\sigma |jm\rangle^d = |jm\rangle, \quad (5-26)$$

(5-25) 式是恒等式, (5-26) 式则对 $|jm\rangle^d$ 给予了限制:

$$(1 - \sigma)/2 |jm\rangle^d = 0 \quad (5-27)$$

由 (5-12)、(5-13) 式的定义, 这相等于要求粒子态是左旋的。这导致 T_d 群代数的基本表示具有左旋结构, 也就是轻子类夸克 (后面马上就证明) 左、右不对称的原因。

(2) A_2 李代数的表示, A_2 是 $SU(3)$ 李群的代数, 秩为 2, 有两个不同于 Y, I_3 的新量子数 Y^d, I_3^d 其基本态不再记为 (uds), 而是记为 $(1_v, 1, 1^c)_L$, 对应量子数如表 (5-4)

表 (5-4) 基本 $(1_{v_L}, 1_L, 1^c_L)$ 的量子数

	Y^d	I_3^d	Q
1_{v_L}	1/3	1/2	0
1_L	1/3	-1/2	-1
1^c_L	-2/3	0	+1

表 (5-4) 中除最后一列 Q 之外, 其余数字与表 (5-2) 一致, 这是 A_2 李代数所要求的, 这里的 Q 满足

$$Q = I_3^d - (3/2)Y^d \quad (5-28)$$

如果将 Q 看成是电荷量子数, 那么 1_{v_L} 可以与左旋中微子对应, 1_L 与左旋轻子对应, 1^c_L 与右旋反轻子对应, 而与表 (5-4) 对应的 A_2 的共轭表示正好是左旋中微子的反粒子即右旋反中微子、左旋反轻子 1_L 即左旋反轻子、右旋反轻子的反粒子 1^c_L 即右旋轻子。

考虑到:

$$Y^d = (2/\sqrt{3})H_1^d, \quad I_3^d = H_2^d, \quad (5-29)$$

则由 (5-28) 式确定的 Q 也是 A_2 李代数表示 $(1_v, 1, 1^c)_L$ 的本征算子。故这样选择的 Q 与盖尔曼—西岛关系是一样有意义的。

(3) A_2' 李代数的表示。 A_2' 也是 $SU(3)$ 李群的代数, 秩为 2, 其表示与 A_2 不同, 记为 (e, μ, τ) 我们也称之为三色量子数为 $(Y^c)^d, (I_3^c)^d$, 它们的对应关系如表 (5-5) 所示。

表 5-5, 色 $(e \mu \tau)$ 的量子数

	$(Y^c)^d$	$(I_3^c)^d$
e	1/3	1/2
μ	1/3	-1/2
τ	-2/3	0

这样, 结合表 (5-4) 和自旋态, 则有 9+9 个轻子态, 它与实验发现的轻子对应于表 5-6,

刚好相等。

表 5-6, T_d 群代数的基础表示与轻子对应关系

T_d 群代数的基础表示	$(l_\nu)_L^e$	l_L^e	$(l^c)_L^e$	$(l_\nu)_L^\mu$	l_L^μ	$(l^c)_L^\mu$	$(l_\nu)_L^\tau$	l_L^τ	$(l^c)_L^\tau$
轻子	ν_{eL}	e_L	e_R	$\nu_{\mu L}$	μ_L	μ_R	$\nu_{\tau L}$	τ_L	τ_R

T_d 群代数的共轭表示

T_d 群代数的共轭表示	$\overline{(l_\nu)_L^e}$	$\overline{l_L^e}$	$\overline{(l^c)_L^e}$	$\overline{(l_\nu)_L^\mu}$	$\overline{l_L^\mu}$	$\overline{(l^c)_L^\mu}$	$\overline{(l_\nu)_L^\tau}$	$\overline{l_L^\tau}$	$\overline{(l^c)_L^\tau}$
轻子	$\overline{\nu_{eR}}$	$\overline{e_L}$	$\overline{e_R}$	$\overline{\nu_{\mu R}}$	$\overline{\mu_L}$	$\overline{\mu_R}$	$\overline{\nu_{\tau R}}$	$\overline{\tau_L}$	$\overline{\tau_R}$

(4) 5个 A_0 的表示, 它们与 O_h 相似, 也可能是某些整体对称性的表示。

综上所述, 我们有下列分析:

(a) T_d 群代数的基本不可约表示存在, 并且就是实验中发现了的 18 个轻子态, 它们的地位相当于 Gell-mann 夸克理论中的带色(这里色是 $e\mu\tau$) 夸克。

(b) 在 O_h 群代数中含空间反演, 导致左右粒子态均存在, 而 T_d 群代数中不含空间反演, 导致正反粒子左右不对称。这在粒子构造上极有可能就是这个差别导致了 O_h 群代数的基态带色(uds) 夸克不单独存在, 而 T_d 的基态带色($e\mu\tau$) 夸克可以单独存在。

II、 T_d 群代数的多重态

因为 T_d 群代数与 O 群代数同构, 因此 T_d 的不可约表示除了以上讨论的自旋、三味(1_ν 、 1 、 1^c)_L 和三色($e\mu\tau$) 所构成的基本表示外, 还有多重表示。

II(1) 三味的多重态

三味(1_ν 、 1 、 1^c)_L 的多重态与三味(uds) 的多重态同构, 用张量 $T_{ab\dots c}^{ij\dots k}$ 表示如表(5-7)。

表 5-7, T_d 群代数的味不可约表示

不可约张量	1	T^i	T_a	T_a^i	T^{ij}	T_{ab}	T^{ijk}	T_{abc}	T_{ab}^{ij}
阶	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(2,0)	(0,2)	(3,0)	(0,3)	(2,2)
表示	①	③	③	⑧	⑥	⑥	⑩	⑩	(27)

我们先讨论⑧表示。与 O_h 群代数类比得赝标八重态(自旋 $J=0$)

$$M = \begin{pmatrix} l_\nu \overline{l_\nu} & l_\nu \overline{l_L} & l_\nu \overline{l^c_L} \\ l_L \overline{l_\nu} & l_L \overline{l_L} & l_L \overline{l^c_L} \\ l^c_L \overline{l_\nu} & l^c_L \overline{l_L} & l^c_L \overline{l^c_L} \end{pmatrix} \quad (5-30)$$

和矢量八重态

$$M(J=1) = \begin{pmatrix} l_\nu \overline{l_\nu} & l_\nu \overline{l_L} & l_\nu \overline{l^c_L} \\ l_L \overline{l_\nu} & l_L \overline{l_L} & l_L \overline{l^c_L} \\ l^c_L \overline{l_\nu} & l^c_L \overline{l_L} & l^c_L \overline{l^c_L} \end{pmatrix} \quad (5-31)$$

和两个单态

$$\eta(J=0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(l_\nu \overline{l_\nu} + l_L \overline{l_L} + l^c_L \overline{l^c_L}) \quad (5-32)$$

$$\eta(J=1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(l_\nu \overline{l_\nu} + l_L \overline{l_L} + l^c_L \overline{l^c_L}) \quad (5-33)$$

8 维表示还有自旋为 1/2 的态两组，它等价于③⊗③⊗③的表示，

$$M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -l_v^1 l_L^2 l_L^{c3} - l_v^1 l_v^2 l_L^{c3} & 2l_v^1 l_v^2 l_L^{c3} - l_v^1 l_L^{c2} l_v^3 - l_L^{c1} l_v^2 l_v^3 & -2l_v^1 l_v^2 l_L^3 + l_v^1 l_v^2 l_v^3 + l_L^1 l_v^2 l_v^3 \\ + l_v^1 l_L^{c2} l_L^3 + l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 & l_L^1 l_v^2 l_L^{c3} + l_v^1 l_L^2 l_L^{c3} & 2l_L^1 l_v^2 l_L^3 - l_L^1 l_v^2 l_v^3 - l_v^1 l_L^2 l_L^3 \\ -2l_L^1 l_L^2 l_L^{c3} + l_L^1 l_L^{c2} l_v^3 + l_L^1 l_v^2 l_L^3 & -l_L^1 l_L^{c2} l_v^3 - l_L^{c1} l_L^2 l_v^3 & -l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 - l_v^1 l_L^2 l_L^3 \\ 2l_L^{c1} l_L^{c2} l_v^3 - l_L^{c1} l_L^2 l_L^{c3} - l_L^1 l_v^2 l_L^{c3} & 2l_L^{c1} l_L^{c2} l_v^3 + l_v^1 l_v^2 l_L^{c3} + l_v^1 l_v^2 l_L^{c3} & -l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 - l_v^1 l_L^{c2} l_L^3 \\ & & + l_L^{c1} l_v^2 l_v^3 + l_L^1 l_L^{c2} l_v^3 \end{pmatrix} \quad (5-34)$$

$$M' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -l_v^1 l_L^2 l_L^{c3} + l_v^1 l_v^2 l_L^{c3} & -l_v^1 l_L^{c2} l_v^3 - l_L^{c1} l_v^2 l_v^3 & -l_v^1 l_v^2 l_v^3 - l_L^1 l_v^2 l_v^3 \\ + l_v^1 l_L^{c2} l_L^3 - l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 & l_L^1 l_v^2 l_L^{c3} - l_v^1 l_L^2 l_L^{c3} & -l_v^1 l_v^2 l_L^3 + l_v^1 l_L^2 l_L^3 \\ l_L^1 l_L^2 l_L^3 - l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 & -l_v^1 l_L^{c2} l_v^3 + l_L^{c1} l_L^2 l_v^3 & -l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 + l_v^1 l_L^{c2} l_L^3 \\ -l_L^{c1} l_L^2 l_L^{c3} + l_v^1 l_L^{c2} l_L^3 & l_v^1 l_v^2 l_L^{c3} - l_v^1 l_L^2 l_L^{c3} & + l_L^{c1} l_v^2 l_v^3 - l_L^1 l_v^2 l_v^3 \end{pmatrix} \quad (5-35)$$

其中 (5-35) 式中应减去一个维表示

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} M' \quad (5-36)$$

10 维表示的自旋为 3/2，只一组，对应于③⊗③⊗③直乘表示为 T^{ijk} 的完全对称部分：

$$\begin{aligned} T^{333} &\sim l_L^{c1} l_L^{c2} l_L^{c3} \\ T^{133} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} (l_v^1 l_L^{c2} l_L^{c3} + l_L^{c1} l_v^2 l_L^{c3} + l_L^{c1} l_L^2 l_v^3) \\ T^{233} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} (l_L^1 l_L^{c2} l_L^{c3} + l_L^{c1} l_L^2 l_L^{c3} + l_L^{c1} l_L^2 l_L^3) \\ T^{311} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} (l_L^{c1} l_v^2 l_v^3 + l_v^1 l_L^{c2} l_v^3 + l_v^1 l_v^2 l_L^{c3}) \\ T^{123} &\sim \frac{1}{\sqrt{6}} (l_L^{c1} l_v^2 l_L^3 + l_L^{c1} l_L^2 l_v^3 + l_v^1 l_L^{c2} l_L^3 + l_v^1 l_L^2 l_L^{c3} + l_L^1 l_v^2 l_v^3 + l_L^1 l_v^2 l_L^{c3}) \\ T^{322} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} (l_L^1 l_L^2 l_L^3 + l_L^1 l_L^{c2} l_L^3 + l_L^1 l_L^2 l_L^{c3}) \\ T^{111} &\sim l_v^1 l_v^2 l_v^3 \\ T^{211} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} (l_L^1 l_v^2 l_v^3 + l_v^1 l_L^2 l_v^3 + l_v^1 l_v^2 l_L^3) \\ T^{122} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} (l_v^1 l_L^2 l_L^3 + l_L^1 l_v^2 l_L^3 + l_L^1 l_L^2 l_v^3) \\ T^{222} &\sim l_L^1 l_L^2 l_L^3 \end{aligned} \quad (5-37)$$

其中 l_v^i 、 l_L^i 、 $l_L^{c_i}$ ($i=1, 2, 3$) 表示它们分属三个③维表示。更高维表示同理可做。但实验中低维态最可能出现。这些态与实验中哪些粒子对应呢？在考虑了色 $e\mu\tau$ 之后再回答。

II (2) 色 $e\mu\tau$ 的单态和多重态

只有色味俱全(包括自旋)方可称之为粒子。以上味多重态并没有色，还不是粒子态。由于 T_6 群代数的单色态存在，每个味的多重态也可以是无色态(三色 $e\mu\tau$ 完全对称)和有色态。而有色态同味多重态一样也有类似于表(5-7)那样的色多重态。因此 T_6 群代数的粒子谱比 O_6

群代数的粒子谱（要求三色完全对称）丰富的多。然而，考虑到色是联系强相互作用的，色多重态的能量会很高，现有实验一般达不到这个能区。故此，我们只考虑基色态，即 1_{ν} 、 1_L 、 1_L^c 带有单色 $e\mu\tau$ 的情况。

II (3) 与实验发现的粒子比较

(1) 具有基色 e 的多重态

A、首先看 (5-30) 式的赝标自旋为 0 的八重态，其每个态的量子数 (Y^d, I^3, Q) 为

$$M = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,1,1) & (1,1/2,-1) \\ (0,-1,-1) & (0,0,0) & (1,-1/2,-2) \\ (-1,-1/2,-1) & (-1,-1/2,2) & (0,0,0) \end{pmatrix} \quad (5-38)$$

我们将实验中发现的所谓 charm 介子填入 (5-38) 式，就可以有

$$M(J=0) = \begin{pmatrix} \frac{D^0}{\sqrt{2}} - \frac{D^{0*}}{\sqrt{6}} & D^+ & F^- \\ D^- & -\frac{D^0}{\sqrt{2}} - \frac{D^{0*}}{\sqrt{6}} & F^{--} \\ F^+ & F^{++} & 2\frac{D^{0*}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (5-39)$$

由于在下一节将看到的 T_d 也具有强相互作用，故可以用与夸克理论相同的方法⁽²³⁾来得到自旋为零的赝标八重态的质量公式：

$$3m_{D^{0*}}^2 - 4m_F^2 + m_D^2 = 0 \quad (5-40)$$

在 (5-39) 式中，只有 $F^{\pm 2}$ 、 D^{0*} 三个粒子没有得到确证。考虑到 $m(D^{\pm}) = 1869.3 \pm 0.5 \text{MeV}$ ， $m(F^{\pm}(D_s^{\pm})) = 1968 \pm 0.7 \text{MeV}$ ，可以从 (5-40) 式预计 $m(F^{\pm 2}) \approx 1970 \text{MeV}$ ， $m(D^{0*}) \approx 2000 \text{MeV}$ 。从文献(8)可知，实验中发现的 $D^*(2010)^0$ 有可能就混含有 D^{0*} 。

B、再看 (5-31) 式的矢量八重态，其各态的量子数 (Y^d, I_3^d, Q) ，也是 (5-38) 式，只是自旋为 1。将 J/Ψ ， $D^*(2010)^{\pm}$ ， $D^*(2010)^0$ ， $D_s^*(2010)^{\pm}$ 填入可得

$$M'(J=1) = \begin{pmatrix} \frac{D^*(2010)^0}{\sqrt{2}} - \frac{(J/\Psi)}{\sqrt{6}} & D^*(2010)^+ & D_s^*(2110)^- \\ D^*(2010)^- & -\frac{D^*(2010)^0}{\sqrt{2}} - \frac{(J/\Psi)}{\sqrt{6}} & F^{--} \\ D_s^*(2110)^+ & F^{++} & 2\frac{(J/\Psi)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (5-41)$$

除 $F^{\pm 2}(J=1)$ 未发现外，其它粒子都存在。与夸克 (uds) 理论同样的考虑， $m(F^{\pm 2}) \sim m(D_s^*(2110)) \sim 2110 \text{MeV}$ 。

C、粒子 $\eta_c(2980)$ 可以填入 (5-32)； $\psi(3685)$ 可以填入 (5-33) 这两个单态。

D、再看二组自旋为 1/2 和 3/2 的八重态 (5-34) 和 (5-35)。由于实验数据的限制，只有 $J=1/2$ 的八重态能够讨论。将 $\Lambda_c^+(2285)$ ， $\Sigma_c^{\pm 0}(2455)$ ， $\Xi_c^{\pm}(2466)$ ， $\Xi_c^0(2473)$ 填入 (5-34)，则有

$$M(J=1/2) = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_c^0(2455)}{\sqrt{2}} - \frac{\Xi_c^0(2473)}{\sqrt{6}} & \Sigma_c^+(2455) & \Xi_c^-(2466) \\ \Sigma_c^-(2455) & -\frac{\Sigma_c^0(2455)}{\sqrt{2}} - \frac{\Xi_c^0(2473)}{\sqrt{6}} & N_c^{--} \\ \Xi_c^+(2466) & \Xi_c^{++} & 2\frac{\Xi_c^0(2473)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (5-42)$$

Ξ_c^{++} , N_c^{--} 没有发现, 同(uds)夸克同样的考虑^(2,3), 它们的质量公式是:

$$3m_{\Xi_c^0(2473)}^2 - 2(m_{\Lambda_c^+(2285)}^2 + m_{\Xi_c^+(2466)}^2) + m_{\Sigma_c^+(2455)}^2 = 0 \quad (5-43)$$

将对应质量代入(5-43)式, 得上式成立的偏差只有8%, 这表明(5-42)的填法是合适的。那么预计 $m(N_c^{--}) \approx m(\Lambda_c^+(2285)) \sim 2300\text{MeV}$, $m(\Xi_c^{++}) \approx m(\Xi_c^+(2466)) \approx 2460\text{MeV}$ 。

E、(1_{ν}^0 、 1_{ν}^+ 、 1_{ν}^-)的其它多重态由于数据太少而无法比较。

(2) 具有单色 μ 的多重态。

可能是由于 $m_{\mu} = 207m_e$, 带单色 μ 的多重态不易得到。所以目前实验数据较少, 不便与理论比较。截止到1992年⁽⁸⁾, 发现的“b夸克”类介子 $B^{\pm,0}(5278)$, $B^*(5324)$, $\Upsilon(9460)$, 及它的共振激发态和重子 $\Lambda_b^0(5641)$ 。其中 $B^{\pm,0}(5278)$, $B^*(5324)$ 可填入(5-30)式的 μ 色赝标介子八重态 M^{μ} :

$$M(J=0) = \begin{pmatrix} \frac{B^0(5278)}{\sqrt{2}} - \frac{B^*(5324)}{\sqrt{6}} & B^+(5278) & F_b^- \\ B^-(5278) & -\frac{B^0(5278)}{\sqrt{2}} - \frac{B^*(5324)}{\sqrt{6}} & F_b^{--} \\ F_b^+ & F_b^{++} & \frac{2B^*(5324)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (5-44)$$

其中 $F_b^{\pm 2}$, F_b^{\pm} 没有报道。如同(uds)夸克类似考虑^(2,3), 则它们的质量关系为

$$3m_{B^*(5324)}^2 - 4m_{F_b^+}^2 + m_{B(5278)}^2 = 0 \quad (5-45)$$

在误差8%下, 预计 $m(F_b) \approx (5300 \pm 500)\text{MeV}$ 。

另一个 $\Upsilon(9460)$ 可填入 μ 色矢量介子八重态, 而 $\Lambda_b^0(5641)$ 则可以填入自旋 $1/2$ 的“重子”八重态, 做法与 e 色一致。这里由于数据太少, 其它多重态就不比较了。

(3) 具有单色 τ 的多重态

与 μ 色相同, 可能由于 $m_{\tau} \approx 17m_{\mu}$, 实验中, 具有 τ 色的多重态比具有 μ 色的多重态更难发现。到1992年⁽⁸⁾, 还没有这类粒子的报道, 故不做比较。

II(4) 小结

通过与实验比较, 所谓“c**bt**”夸克所构成的粒子都可以由 T_d 群代数理论来实现, 这时带色夸克是18个轻子(见表5-6)。因此, 我们并不需要用“c**bt**”夸克。在以上讨论之中用了一些与“c**bt**”有关的符号, 只是由于历史原因, 便于考证。

§ 5—3 结论

以上我概述了相互作用理论的建立过程，下面分别具体地来实现它。到此，我们用 O_h 群代数与 T_d 群代数的表示，完整地构造出了现有实验证实的所有粒子，并与实验数据符合很好，同时也预言了一些实验中还未发现的粒子。这样，将所有粒子态通过(3-13)式与相互作用从而与时空结构紧密地联系起来，证实了粒子的存在完全取决于时空结构的思想。

§ 6 相互作用

在质空中，在 § 3 得到了粒子态所满足的对称性(3-13)，即

$$\psi'(\mathbf{r},t) = \exp[-i\theta^\alpha(\mathbf{r},t)T_\alpha]\psi(\mathbf{r},t) \quad (6-1)$$

这里， T_α 是群元(即生成元)，它是这个粒子所对应的空穴或空隙元胞在真空时的点群对称性元素。对空穴，它可以是 O_h 或 T_d ，对空隙填隙元胞，视空隙的类型也是 O_h 或 T_d 。经 § 5 的研究表明：对 uds 夸克粒子，其对称性为 O_h ，粒子为空穴的 O_h 对称性，反粒子(uds)为八面体空隙的对称性 O_h 。而对($l_{\nu L}$ 、 l_L 、 l'_L)轻子类粒子，其对称性为 T_d ，粒子为空穴态的 T_d 对称性，反粒子为四面体空隙的对称性 T_d 。 $\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)$ 是对应于每一个群元素 T_α 的角度，它随时空坐标而变。根据规范场论的思想，(6-1)式对应局部规范变换， T_α 就是这个规范群的生成元。 $\{T_\alpha\}$ 所满足的群代数就是这个规范对称性满足的代数关系。由于规范场论已经发展得相当完善，这里我们的任务就是先确定这些生成元满足什么样的代数，然后对每个生成元引入一个规范场。我发现，这个 $\{T_\alpha\}$ 群代数是李代数，可以分解为多个不可约的子李代数。对应这几个不可约子李代数，可以引入几种规范场，例如 T_d 群代数(其表示是轻子类粒子)，它可以分解为 5 个 A_0 李代数，一个 A_1 李代数和 2 个 A_2 李代数之直和(见附录 A)，结合 § 5 关于粒子构造的结果，对应于这些子李代数所引入的规范场就是这些子李代数表示粒子之间的相互作用： A_2 的表示是味($l_{\nu L}$ 、 l_L 、 l'_L)，对应 A_2 引入的八个规范场则是味之间的相互作用。 A_2' 的表示是色($e\mu\tau$)，对应于 A_2 引入的八个规范场则是色之间的相互作用； A_1 的表示是自旋，对应 A_1 引入的三个规范场则是自旋之间的相互作用，它也是一种基本相互作用。

O_h 代数是 O 群代数的扩充，可以分解为左旋 O^+ 群代数与右旋 O^- 群代数之直和[见(3-17)式]和(5-6)式]，显式地写出为：

$$A(O_h) = 5A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2' \oplus 5A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2' \quad (6-2)$$

$$A(O^+) \quad A(O^-)$$

其中

$$T^+ \equiv T_L = (1+\sigma)/2 T_i \in A(O_h), \quad T_i \in A(O). \quad (6-3)$$

$$T^- \equiv T_R = (1-\sigma)/2 T_i \in A(O_h)$$

这使得 $A(O_h)$ 的表示分解为 $\psi_L(\mathbf{r}, t)$ 和 $\psi_R(\mathbf{r}, t)$ 两部分。在 Dirac 表象它们分别为

$$\begin{aligned} \psi_L &= 1/2(1+\gamma_5) \psi \\ \psi_R &= 1/2(1-\gamma_5) \psi \end{aligned} \quad (6-4)$$

其中 ψ 是 $A(O)$ 群代数的表示， γ_5 是 Dirac 矩阵，所以 ψ_L 与 ψ_R 对应左旋与右旋表示。

由(6-1)式知，对 $T_\alpha \in O_h$ ， $\{T_\alpha\}$ 可以分解为两部分 $\{T_\alpha\}$ 与 $\{\sigma T_\alpha\}$ ，它们对应的角度分别为 $\theta^\alpha(\mathbf{r},t)$ 和 $\theta^\alpha_\sigma(\mathbf{r},t)$ ，在不考虑形变时，从下图容易看出

$$\theta^\alpha(\mathbf{r},t) = \theta^\alpha_\sigma(\mathbf{r},t) \quad (6-5)$$

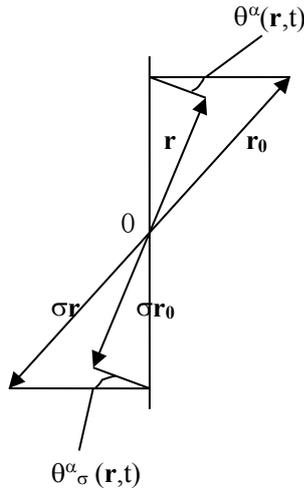


图 6-1, $\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)$ 和 $\theta^\alpha_\sigma(\mathbf{r}, t)$

T_α 为以 0 点为中心的转动, \mathbf{r}_0 、 $\sigma\mathbf{r}_0$ 为真空元胞位置,
 \mathbf{r} 、 $\sigma\mathbf{r}$ 为质空元胞位置, σ 为空间反演。

利用 (6-5) 式, 由 (6-1) 式得

$$\begin{aligned} & \exp[-i\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha - i\theta^\alpha_\sigma(\mathbf{r}, t)\sigma T_\alpha] \Psi(\mathbf{r}, t) \\ & = \exp[-2i\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha] \Psi_L(\mathbf{r}, t) + \Psi_R(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \Psi'(\mathbf{r}, t) = \exp[-2i\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha] \Psi_L(\mathbf{r}, t) + \Psi_R(\mathbf{r}, t) \quad (6-6)$$

这表明:(1)相互作用只发生在左旋态之间,右旋部分不仅不与左旋部分相互作用,而且右旋之间也没有相互作用,这相当于说相互作用是纯 V-A 型相互作用,没有右旋流。这个结果与现有实验中存在中性流(如电磁流)是不符合的⁽²⁴⁾,而且 QCD 也不是纯 V-A 型理论。(2)不论是 T_α 群代数还是 O_h 群代数的规范理论,要求其粒子质量和规范粒子质量均为零。这也与现有实验不符。味相互作用的规范粒子质量 $m(W^\pm, Z^0) \sim 102\text{GeV}$ 。

这两点之所以产生,是因为我们在前面的讨论没有考虑元胞的形变,而在质空中,所有元胞都不同程度有形变。我将考虑元胞形变的做法叫广义 Higgs 机制。现在我们看如何描述这个形变。

首先,由于元胞形变,(6-5)式就不再对所有 α 都成立。这有可能解决上述第一个矛盾。

其次,对每个元胞 (\mathbf{r}, t) ,它的几何形状可以用一个函数 $F(\mathbf{r}, t)$ 来描述,而 $F(\mathbf{r}, t)$ 总可以展成下列形式

$$F(\vec{r}, t) = l(\vec{r}, t) + C_\mu(\vec{r}, t) \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2!} C_{\mu\nu}(\vec{r}, t) \frac{\partial^2 F(\vec{r}, t)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \dots \quad (6-7)$$

这表明任意位置的元胞的形变可以用标量场 $l(\mathbf{r}, t)$ 和矢量场 $C_\mu(\mathbf{r}, t)$ 以及其它张量来描述。只看标量场 $l(\mathbf{r}, t)$,如果将它看成是元胞 (\mathbf{r}, t) 的尺度(譬如说直径),它的真空值就不为零,这正是 Higgs 场的特征⁽³⁵⁾。它有可能解决上述第二个矛盾。因此,我们将这些场称之为广义 Higgs 场。

§ 6-1 (uds)夸克族粒子之间的相互作用

这族粒子具有 O_h 群代数所对应的 $S(O_h)$ 对称性。如 (6-2) 式那样可以分解为一些子李代数之直和。

I 味动力学

我们先看 A_2 味道表示(uds)之间的相互作用。如果用原先的“内部对称性”概念，它相当于具有 $SU_F(3)$ 味道内部对称性。由于(6-5)式的考虑，只有(uds)_L之间有相互作用，而(uds)_R之间、(uds)_L与(uds)_R之间均没有相互作用。

味 A_2 的生成元有 8 个，用标准基，它们与 $T_\alpha \in O$ 之间的关系在(5-4)式已经给出。为了与 GWS(标准)模型对照，我们选用 A_2 李代数的 8 个 Gell-mann 矩阵做为生成元 T_i , $i=1, 2, \dots, 8$ 。其中

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, T_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(6-8)

在 $SU(3)$ 之下，(6-6)式改写为

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\omega^i(\mathbf{r}, t)T_i] \Psi_L(\mathbf{r}, t) + \Psi_R(\mathbf{r}, t) \quad (6-9)$$

其中 T_i 就是(6-8)式的 8 个 Gell-mann 矩阵， Ψ_L , Ψ_R 是味 A_2 的表示粒子， $\omega^i(\mathbf{r}, t)$ 是 $\theta^a(\mathbf{r}, t)$ 的函数，它也是时空坐标的函数，故是局部规范变换。

按照局部规范不变理论，与 A_2 的每个生成元 T_i 相对应存在一个规范场 $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ ，即

$$T_i, A_\mu^i(\mathbf{r}, t), i=1, 2, \dots, 8 \quad (6-10)$$

共 8 个规范场，它们都是时空坐标的函数。

我们用

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A_\mu(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 T_i A_\mu^i(\vec{r}, t) \quad (6-11)$$

来定义 $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ ，这样我们可用

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} & \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}} & \frac{A_\mu^4 - iA_\mu^5}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_\mu^1 + iA_\mu^2}{\sqrt{2}} & -\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} & \frac{A_\mu^6 - iA_\mu^7}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_\mu^4 + iA_\mu^5}{\sqrt{2}} & \frac{A_\mu^6 + iA_\mu^7}{\sqrt{2}} & -2\frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(6-12)

这一 3×3 矩阵 $A_{\mu a}^b(\mathbf{r}, t)$, $a, b=1, 2, 3$ 来表示规范场且满足

$$\sum_{a=1}^3 A_{\mu a}^b(\vec{r}, t) = 0 \quad (6-13)$$

做如下变换

$$\begin{aligned}
W_{1\mu} &= \frac{A_\mu^1 + iA_\mu^2}{\sqrt{2}}, \overline{W}_{1\mu} = \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}}, W_{2\mu} = \frac{A_\mu^4 + iA_\mu^5}{\sqrt{2}}, \overline{W}_{2\mu} = \frac{A_\mu^4 - iA_\mu^5}{\sqrt{2}} \\
X_\mu &= \frac{A_\mu^6 + iA_\mu^7}{\sqrt{2}}, \overline{X}_\mu = \frac{A_\mu^6 - iA_\mu^7}{\sqrt{2}}, X'_\mu = \frac{-A_\mu^3 + \sqrt{3}A_\mu^8}{2}, B_\mu = \frac{\sqrt{15}}{6} \left(-A_\mu^3 - \frac{A_\mu^8}{\sqrt{3}} \right)
\end{aligned} \tag{6-14}$$

$$A_\mu(r, t) = \begin{pmatrix} \frac{-6B_\mu}{\sqrt{30}} & \overline{W}_{1\mu} & \overline{W}_{2\mu} \\ W_{1\mu} & \frac{X'_\mu}{2} + \frac{3}{\sqrt{30}}B_\mu & \overline{X}_\mu \\ W_{2\mu} & X_\mu & -\frac{X'_\mu}{2} + \frac{3}{\sqrt{30}}B_\mu \end{pmatrix} \tag{6-15}$$

按照规范理论的一般原则，费米场

$$\Psi(r, t) = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

的规范(6-1)或(6-9)不变的拉格朗日密度为

$$L_f = i\overline{\Psi} \mathcal{D} \Psi = i\overline{\Psi}_L \mathcal{D}_1 \Psi_L + i\overline{\Psi}_R \mathcal{D}_2 \Psi_R, \tag{6-16}$$

其中 $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ 均是协变导数，

$$\mathcal{D} = \gamma_\mu D_\mu, \quad \mathcal{D}_1 = \gamma_\mu D_{1\mu}, \quad \mathcal{D}_2 = \gamma_\mu D_{2\mu}, \quad D_{1\mu} = \partial_\mu - ig_F T_i A_\mu^i(r, t), \quad D_{2\mu} = \partial_\mu \tag{6-17}$$

其中 g_F 是一耦合常数，这样(6-16)式变为

$$L_f = i\overline{(u \ d \ s)} \gamma_\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} + \frac{g_F}{\sqrt{2}} \overline{(u \ d \ s)}_L \gamma_\mu A_\mu(\vec{r}, t) \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_L \tag{6-18}$$

所以，规范场与粒子场相互作用项为

$$L_{fg} = \frac{g_F}{\sqrt{2}} \overline{(u \ d \ s)}_L \gamma_\mu A_\mu(\vec{r}, t) \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_L \tag{6-19}$$

从(6-18)式和(6-19)式可以看出:(1)夸克(uds)和规范场都没有质量；(2)夸克与规范场的作用是纯 V-A 型相互作用。实践表明⁽²⁴⁾，荷电流是纯 V-A 型，而(uu)型中性流不是纯 V-A 型。因此，对荷电流，该理论与实验相符；对中性流，该理论与实验不符。(3)理论预言存在(ds)型中性流。而实验表明这种中性流比(uu)型中性流小 8 个数量级⁽²²⁾。GWS(标准)模型通过 GIM 机制⁽²⁵⁾将(ds)和(sd)型中性流去掉，认为它不存在。以上这三个问题可以通过元胞形变(广义 Higgs 机制)一并得到解决。

I (1) 广义 Higgs 机制

在考虑了元胞的形变之后(6-5)式就不再成立了。如果考虑到弱相互作用这种形变不大，

使得除 T_8 之外,

$$\omega^i(\mathbf{r},t) = \omega^i_\sigma(\mathbf{r},t) \quad (6-20)$$

则(6-9)式成为

$$\Psi'(\mathbf{r},t) = \exp[-i\omega^i(\mathbf{r},t)T_i - i\eta(\mathbf{r},t)Y] \Psi_L + \exp[-i\eta(\mathbf{r},t)Y] \Psi_R \quad (6-21)$$

其中

$$Y = T_8/\sqrt{3}, \quad \eta(\mathbf{r},t) = \eta(\theta^i(\mathbf{r},t) - \theta^i_\sigma(\mathbf{r},t)) \quad (6-22)$$

根据规范理论, (6-21)式表明粒子间的相互作用是定域规范不变理论, 除了(6-10)引入的 $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ 相互作用外, 还相应于 Y 引入一个规范场 $\Phi_\mu(\mathbf{r},t)$

$$Y, \Phi_\mu(\mathbf{r},t) \quad (6-23)$$

所以对左旋分量 $\Psi_L(\mathbf{r},t)$ 的协变导数

$$D_{1\mu} = \partial_\mu - ig_F A^i_\mu(\mathbf{r},t)T_i - ig'_F \Phi_\mu(\mathbf{r},t)Y_L \quad (6-24)$$

对右旋分量 $\Psi_R(\mathbf{r},t)$ 的协变导数

$$D_{2\mu} = \partial_\mu - ig'_F \Phi_\mu(\mathbf{r},t)Y_R \quad (6-25)$$

这样, 规范场有二: $A_\mu(\mathbf{r},t)$ 和 $\Phi_\mu(\mathbf{r},t)$, 总的规范场强为以下两项之和:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)T_i + g_{Fijk} A^i_\mu A^j_\nu T_k \quad (6-26)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$$

总的规范场拉氏量为

$$\mathcal{L}_g = -1/4 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 1/4 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (6-27)$$

按照规范理论, 在考虑元胞形变之后, (6-16)式拉氏量变为

$$\mathcal{L}_f = i\bar{\Psi}_L \gamma_\mu D_{1\mu} \Psi_L + i\bar{\Psi}_R \gamma_\mu D_{2\mu} \Psi_R \quad (6-28)$$

这里 $D_{1\mu}$, $D_{2\mu}$ 是(6-24)、(6-25)式。注意 Ψ_L 是一个三维表示, $I_3 \neq 0$, 而 Ψ_R 是一个一维表示, $I_3 = 0$ 。由 Gell-mann 西岛关系有:

$$Y_L = 2(Q - I_3)$$

$$Y_R = 2Q \quad (6-29)$$

所以(6-28)式显式写成

$$L_f = i \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}} \gamma_\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} + L_{fg} \quad (6-30)$$

其中, 规范场与粒子场的相互作用项 \mathcal{L}_{fg} 为:

$$L_{fg} = \frac{g_F}{\sqrt{2}} \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}} \gamma_\mu A_\mu^{eff} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (6-31)$$

其中:

$$A_{\mu}^{eff}(r, t) = \begin{pmatrix} R_{1\mu} & \frac{(1+\gamma_5)\overline{W}_{1\mu}}{2} & \frac{(1+\gamma_5)\overline{W}_{2\mu}}{2} \\ \frac{(1+\gamma_5)W_{1\mu}}{2} & R_{2\mu} & \frac{(1+\gamma_5)\overline{X}_{\mu}}{2} \\ \frac{(1+\gamma_5)W_{2\mu}}{2} & \frac{(1+\gamma_5)X_{\mu}}{2} & R_{3\mu} \end{pmatrix}$$

(6-32)

式中

$$R_{1\mu} = \frac{1+\gamma_5}{2} \left(\frac{A_{\mu}^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_{\mu}^8}{\sqrt{6}} + \frac{g'_F \phi_{\mu}}{3g_F} \right) + \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{g'_F \phi_{\mu}}{3g_F}$$

$$R_{2\mu} = \frac{1+\gamma_5}{2} \left(-\frac{A_{\mu}^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_{\mu}^8}{\sqrt{6}} + \frac{g'_F \phi_{\mu}}{3g_F} \right) + \frac{1-\gamma_5}{2} \left(\frac{g'_F \phi_{\mu}}{3g_F} \right)$$

$$R_{3\mu} = \frac{1+\gamma_5}{2} \left(-\frac{2A_{\mu}^8}{\sqrt{6}} - \frac{2g'_F \phi_{\mu}}{3g_F} \right) + \frac{1-\gamma_5}{2} \left(-\frac{2g'_F \phi_{\mu}}{3g_F} \right)$$

(其中这里的 g'_F 与(6-24)、(6-25)式的 g'_F 相差二倍)。(6-32)式的有效相互作用表明, 荷电流是纯 V-A 型, 而中性流是 V-A 型, 但不再是纯 V-A 型。这符合实验事实。先只考虑 $\bar{q}q$ 型中性流 j^{NC}

$$j_{\mu}^{NC} = \frac{1+\gamma_5}{2} (\sqrt{2}j^I A_{\mu}^3 + \frac{3}{\sqrt{6}}j^Y A_{\mu}^8 + \frac{g'_F}{g_F}j^Y \phi_{\mu}) + \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{g'_F}{g_F}j^Y \phi_{\mu}$$

(6-33)

其中

$$j^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, j^Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(6-34)

在(6-33)式的中性流中应有一类是电磁流 eQA_{μ} , 不失一般性, 令⁽²²⁾

$$\begin{pmatrix} \phi_{\mu} \\ A_{\mu}^3 \\ A_{\mu}^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 & c_1 c_2 s_3 - s_2 c_3 \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 & -c_1 s_2 c_3 + c_2 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\mu} \\ Z_{\mu} \\ Z'_{\mu} \end{pmatrix}$$

(6-35)

其中 $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $i=1, 2, 3$ 。将(6-35)式代入(6-33)式得

$$j_{\mu}^{NC(\bar{q}q)} = j_A A_{\mu} + j_Z Z_{\mu} + j_{Z'} Z'_{\mu}$$

(6-36)

其中

$$j_A = \frac{(1+\gamma_5)}{2} \left(\sqrt{2} j^I (-\sin\theta_1 \cos\theta_2) + j^Y \left(\frac{3\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sqrt{6}} + \frac{g_F'}{g_F} \cos\theta_1 \right) \right) + \frac{(1-\gamma_5)}{2} \frac{g_F'}{g_F} Q \cos\theta_1 \quad (6-37)$$

$$j_{Z'} = \frac{(1+\gamma_5)}{2} \left(\sqrt{2} j^I (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \sin\theta_2 \cos\theta_3) + j^Y \left(\frac{3(-\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\theta_2 \cos\theta_3)}{\sqrt{6}} + \frac{g_F'}{g_F} \sin\theta_1 \sin\theta_3 \right) \right) + \frac{(1-\gamma_5)}{2} \frac{g_F'}{g_F} Q \sin\theta_1 \sin\theta_3 \quad (6-38)$$

$$j_Z = \frac{(1+\gamma_5)}{2} \left(\sqrt{2} j^I (\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \sin\theta_2 \sin\theta_3) + j^Y \left(\frac{3(-\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_2 \sin\theta_3)}{\sqrt{6}} + \frac{g_F'}{g_F} \sin\theta_1 \cos\theta_3 \right) \right) + \frac{(1-\gamma_5)}{2} \frac{g_F'}{g_F} Q \sin\theta_1 \sin\theta_3 \quad (6-39)$$

假如 $A_\mu(\mathbf{r},t)$ 是电磁场, 则要求

$$g_F j_A = eQ \quad (6-40)$$

将(6-37)式与(6-40)式联立得

$$\sin\theta_1 = \sqrt{2} g_F' (3g_F^2 + 2g_F'^2)^{-1/2}, \sin\theta_2 = -\frac{1}{2}, \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 3g_F g_F' (3g_F^2 + 2g_F'^2)^{-1/2} = e \quad (6-41)$$

将(6-41)、(6-34)式代入(6-38)、(6-39)式得矩阵形式的 $j_Z, j_{Z'}$ 为

$$j_Z = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \gamma_5 & & \\ & a_2 + b_2 \gamma_5 & \\ & & a_3 + b_3 \gamma_5 \end{pmatrix} \quad (6-42)$$

$$j_{Z'} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \gamma_5 & & \\ & c_2 + d_2 \gamma_5 & \\ & & c_3 + d_3 \gamma_5 \end{pmatrix} \quad (6-43)$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{e}{\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} - \frac{1}{2} \right) \cos \theta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \theta_3 \\
 b_1 &= \frac{e}{3\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} - \frac{3}{2} \right) \cos \theta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \theta_3 \\
 a_2 &= \frac{e}{\sqrt{6}} g_F' \cos \theta_3 \\
 b_2 &= \frac{2e}{3\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{3}{2} \right) \cos \theta_3 \\
 a_3 &= \frac{-e}{\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{1}{2} \right) \cos \theta_3 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \theta_3 \\
 b_3 &= \frac{-e}{3\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{3}{2} \right) \cos \theta_3 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \theta_3 \\
 c_1 &= \frac{e}{\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} - \frac{1}{2} \right) \sin \theta_3 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \theta_3 \\
 d_1 &= \frac{-e}{3\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{3}{2} \right) \sin \theta_3 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \theta_3 \\
 c_2 &= \frac{e}{\sqrt{6}} g_F' \sin \theta_3 \\
 d_2 &= \frac{2e}{3\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{3}{2} \right) \sin \theta_3 \\
 c_3 &= \frac{-e}{\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{1}{2} \right) \sin \theta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \theta_3 \\
 d_3 &= \frac{-e}{3\sqrt{6}} g_F' \left(\frac{g_F'^2}{g_F^2} + \frac{3}{2} \right) \sin \theta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \theta_3
 \end{aligned}$$

(6—55)

以上各式中 $\theta_1, g_F, g_F', \theta_3$ 均可以由实验确定, 考虑到实验结果, 认为 Z_w 流比 Z'_w 流大很多, 这样就有

$$a_1/b_1 = 1 - 8 \sin^2 \theta_w/3$$

(6—56)

$$a_2/b_2 = 1 - 4 \sin^2\theta_w/3$$

其中 θ_w 就是所谓温伯格角, 现有实验值

$$\sin^2\theta_w = 0.224 \pm 0.02, \quad e = 4\pi/137 \quad (6-57)$$

则得到

$$\begin{aligned} g_F &= 0.3616 \\ g_F' &= 0.4525 \\ \text{tg}\theta_3 &= -0.412 \\ \sin\theta_1 &= 0.546 \end{aligned} \quad (6-58)$$

前面这些考虑, 仅只涉及到元胞形变后对粒子间相互作用的影响, 如果还考虑元胞形变本身, 就应引入(6-7)式所示的广义 Higgs 场。在一级近似下, 我们只引入一标量场 $l(\mathbf{r}, t)$ 。由于这个场也是在质空之中, 同样应满足(6-1)式的规范不变性, 也即, $l(\mathbf{r}, t)$ 在时空中是一标量, 但它还是 A_2 的表示(相当于“内部”坐标)。一般, 标量场的规范不变拉氏量可选为

$$L = D^\mu l^\dagger(\vec{r}, t) D_\mu l(\vec{r}, t) + U(l) \quad (6-59)$$

其中

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g_F}{\sqrt{2}} A_\mu^{\text{eff}}(\vec{r}, t)$$

为了使规范场获得质量, 我们可以选择合适的势函数 $U(l)$ 。考虑到 $l(\mathbf{r}, t)$ 在真空中,

$$l(\mathbf{r}, t) = l_0 \quad (6-60)$$

$l(\mathbf{r}, t)$ 正好具有 Higgs 场的特征, 故可以选 $U(l)$ 为 Higgs 势, 从而得到规范场和粒子质量。按 Higgs 机制通常做法⁽³⁵⁾。我们能够得到 $W_{1,2}^\pm, Z, Z'$ 等的质量, 但没有很好得到 X, X' 的质量。这可能有两种原因。一种是 Higgs 机制本身的困难, 一种是对 Higgs 机制还没有研究透。下面我就具体来做, 并由实验已得到的 W^\pm, Z 的质量估计一下真空元胞的尺度 l_0 。

标量场 $l(\mathbf{r}, t)$ 是 A_2 李代数的多重表示之和, 先只选三维基本表示 $l^\alpha(\mathbf{r}, t)$, $\alpha=1, 2, 3$, 而其势就是典型的 Higgs 势,

$$U(l) = -\mu^2 (l^\dagger l) / 2 + \lambda (l^\dagger l)^2 / 4 \quad (6-61)$$

$$\text{当 } (l^\dagger l) = \mu^2 / \lambda \equiv \langle l^\dagger l \rangle_0 \quad (6-62)$$

时, $U(l)$ 取极值。我们取 l^α 的真空平均值 $\langle l^\alpha \rangle_0$ 为

$$\langle l^\alpha \rangle_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} \quad (6-63)$$

做一平移

$$l^\alpha = \langle l^\alpha \rangle_0 + l^{\alpha'} \quad (6-64)$$

则规范场的质量项为:

$$\frac{1}{4} g_F^2 v_0^2 (A_\mu^{\text{eff}})^\alpha (A_\mu^{\text{eff}})^\alpha \quad (6-65)$$

$\alpha=1$ 是 Z, Z' 的质量项, $\alpha=2, 3$ 分别是 W^\pm 的质量项, 故有

$$M_{W,Z} = (1/2) g_F v_0 \quad (6-66)$$

已知 $M_{W,Z} = 10^2 \text{GeV}$, $g_F \sim 0.45$

$$\text{则 } v_0 \sim 3 \times 10^2 \text{GeV} \quad (6-67)$$

所以 $l_0 \sim 10^2 \text{GeV}$ (6-68)

这样的 l_0 , 相当于长度

$$l_0 \sim hc/10^2 \text{GeV} \sim 10^{-18} \text{m} \quad (6-69)$$

这个结果与李政道⁽¹⁹⁾的估计基本相符。我曾经试图用改进的 Higgs 方法去得到 X, \bar{X} 的质量以满足 $(\bar{d}s)$ 和 $(\bar{s}d)$ 型中性流很小的要求, 但未获得成功。但我相信, 精细地给出 X 的质量是可能的。

II 色动力学

如果不考虑 $SU_c^L(3)$ (对应色左旋态)与 $SU_c^R(3)$ (对应色右旋态)的区别, 即这里的色动 $SU(3)$ 规范理论, 这与通常的色动力学⁽²⁶⁾相同。这样, 通常的色动力学结论都原样拿来即可, 然而, 我的理论有左、右之分, 这可以通过以下的分析说明。在味动力学中, 由于相互作用较弱, 就是考虑了形变之后, (6-5)式还近似成立。这样, 在我们的弱电相互作用中有左、右不对称。但是, 在色相互作用(强相互作用)中, 元胞形变较大, 使得 $\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)$ 、 $\theta_\sigma^\alpha(\mathbf{r}, t)$ 成了两个独立的变量, 那么由(6-1)式得:

$$\begin{aligned} & \exp[-i\theta^\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha - i\theta_\sigma^\alpha(\mathbf{r}, t)\sigma T_\alpha] \Psi(\mathbf{r}, t) \\ & = \exp[-i\theta_1^\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha] \Psi_L(\mathbf{r}, t) + \exp[-i\theta_2^\alpha(\mathbf{r}, t)T_\alpha] \Psi_R(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (6-70)$$

其中

$$\theta_1^\alpha(\mathbf{r}, t) = \theta^\alpha(\mathbf{r}, t) + \theta_\sigma^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (6-71)$$

$$\theta_2^\alpha(\mathbf{r}, t) = \theta^\alpha(\mathbf{r}, t) - \theta_\sigma^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (6-72)$$

这样, 色相互作用在左、左旋之间是严格对称的。与 A_2' 的八个生成之相对应有 8 个胶子场

$$A_\mu(\mathbf{r}, t), \quad (i=1, 2, \dots, 8, \mu=0, 1, 2, 3), \quad \text{其规范场强} \quad (6-73)$$

$$F_{\mu\nu}^i = (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) + g_c f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k$$

其中 g_c 为色耦合常数, f_{jk}^i 为 A_2' 的结构常数。所以, 我们的色相互作用理论与通常的色动力学是一致的, 所不同的是, 在我的理论中应用离散的方法处理, 只是在能量较低时, 相互作用距离远大于 l_0 时, 才可以近似用连续方法处理。这就是为什么在低能区通常色动力学的合理之处。进一步的讨论不在此重复。

III 旋动力学

在我的理论中, 自旋之间有相互作用, 并且, 这个相互作用的地位与味之间、色之间的相互作用相当。因此说它也是一类基本相互作用。严格来说, 旋之间的相互作用是粒子自旋第三分量即自旋各态之间的相互作用。

然而, 在我们以前的理论中, 自旋相互作用是归结为电磁相互作用的, 自旋并非一类独立的相互作用。量子电动力学的成功⁽²⁷⁾使得人们对这一点确信不疑。

如果我们深究量子电动力学成功的基础, 那么这个基础就是 Dirac 方程。正是 Dirac 方程才使得自旋与电磁场、自旋之间的相互作用等修正才得到量子电动力学非常精确的结果。例如电子磁矩的理论结果与实验结果的惊人一致。但是 Dirac 方程是最基本的吗? 或者说, Dirac 方程有无更深层次的原因? 回答是, Dirac 方程并不是最基本的, 而是时空 Poincare 不变性的必然结果⁽²⁸⁾。对 Poincare 群的四分量自旋表示 $|\mathbf{k}\alpha\rangle$ ($\alpha=1, 2, 3, 4$), 其动量算子 \mathbf{P} 自身的点积 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ 是一个 Casimir 算子, 它导致方程

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} |\mathbf{k}\alpha\rangle = -k^2 |\mathbf{k}\alpha\rangle \quad (6-74)$$

方程(6-74)就是 Klein-Gordon 方程, 其中 $k^2 \propto M^2$ 。M 是粒子质量。然而, 在考虑到空间反演之后的四分量理论中, \mathbf{P} 不再是一个 Poincare 不变算子, 不变算子是 $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 是四个 Dirac 矩阵, 可以证明

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P})^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \quad (6-75)$$

所以, 结合(6-74)式, $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}$ 的本征值是 $\pm ik$, 这样就得到了四分量表述中的一个约束条件:

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P} + ik)|\mathbf{k}\alpha\rangle = 0 \quad (6-76)$$

这正是 Dirac 方程(取 $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}$ 的本征值为 $-ik$)。所以说, Dirac 方程是 Poincare 对称性的必然结果。

如果我们注意到以上这段讨论是在通常的四维时空中进行的, 马上就会产生一个问题, 自旋好象是通常时空的一个性质, 就象 \hat{k} 一样, 这对吗?回答是:不对。我们深究在以上通常理论⁽²⁸⁾中自旋的引入过程, 就会知道, 自旋 $S=1/2$ 对应于转动的双值表示, 即通常时空转动 2π 角后并不回到 0 角位置, 而是要求转 4π 角才回到 0 角位置($0 \leq \phi \leq 4\pi$)。这个要求在考虑时空内部结构时在通常时空是无法接受的。也就是说, 接受了双值表示(自旋), 就是考虑了时空的结构。所以说, Dirac 方程是有内部结构的时空的结果。在我的理论中正好出现了这样的结构。

因此, 量子电动力学的结果证明了自旋之间相互作用的存在, 如下我们来讨论自旋相互作用是基本的。

根据规范理论, 考虑自旋 A_1 和味 A_2 局部对称性, 则

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_F A_\mu^\alpha(\mathbf{r}, t) T_\alpha - ig_s B_\mu^\gamma(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\tau}_\gamma, \quad (6-77)$$

其中 g_F 、 g_s 是二耦合常数, $T_\alpha \in A_2$, $\boldsymbol{\tau}_\gamma \in A_1$ 。 $B_\mu^\gamma(\mathbf{r}, t)$ 是对应自旋生成元 $\boldsymbol{\tau}_\gamma$ 引入的规范场。

定义

$$A'_\mu(\mathbf{r}, t) = A_\mu(\mathbf{r}, t) + (g_s/g_F) B_\mu(\mathbf{r}, t) = A_\mu^\alpha(\mathbf{r}, t) T_\alpha + (g_s/g_F) B_\mu^\gamma(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\tau}_\gamma \quad (6-78)$$

则(6-77)式变为

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_F A'_\mu(\mathbf{r}, t) \quad (6-79)$$

这里 $A'_\mu(\mathbf{r}, t)$ 与 $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ 之间的区别是: $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ 只是与粒子味指标相耦合的规范场, 对自旋指标不起作用; 而 $A'_\mu(\mathbf{r}, t)$ 除了对味指标外还对自旋指标。这就是说, $A_\mu(\mathbf{r}, t)$ 单纯是味之间的相互作用, 而 $A'_\mu(\mathbf{r}, t)$ 既是味之间也是自旋之间的相互作用。如果一粒子既有味又有自旋, 那它们之间的相互作用就是 $A'_\mu(\mathbf{r}, t)$ 场。这正是我们在味动力学中(当然也是在色动力学中)的结果。例如, 在味 u 之间的相互作用

$$\frac{g_F}{\sqrt{2}} \bar{u} \boldsymbol{\gamma}_\mu Z_\mu u \quad (6-80)$$

如果我们不考虑 u 的自旋取向, 我们就并不知道 Z_μ 是一个自旋 m_z 取多少的分量, Z_μ 也无所谓自旋。但是, 当我们考虑了自旋的方向之后, 就有了以下四项

$$\frac{g_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\uparrow \boldsymbol{\gamma}_\mu Z_\mu u_\uparrow \quad \frac{g_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\downarrow \boldsymbol{\gamma}_\mu Z_\mu u_\downarrow \quad \frac{g_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\uparrow \boldsymbol{\gamma}_\mu Z_\mu u_\downarrow \quad \frac{g_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\downarrow \boldsymbol{\gamma}_\mu Z_\mu u_\uparrow \quad (6-81)$$

虽然在这四项中我们用了个相同的符号 Z_μ , 但我们知道, Z_μ 的 m_z 是不同的, 前两项 $m_z=0$, 后两项 $m_z=\pm 1$ 。这就是说 Z_μ 有三个分量, 考虑了规范场的自旋($J=1$), 就是考虑了自旋之间的相互作用, 规范场 $A'_\mu(\mathbf{r}, t)$ 三分量之间之不同就是自旋相互作用。

以氢原子为例, 来说明 g_s 与 e 之间的关系。我们知道, 由于电磁相互作用引起的氢原子能级分裂大约 1eV , 而由核子自旋与电子自旋之间相互作用的能级分裂(即所谓超精细结构)大约为 10^4MHz ⁽²⁹⁾, 这样电磁相互作用与自旋相互作用所导致的能量分裂之比

$$\Delta E_s / \Delta E_e \sim 10^{-6} \quad (6-82)$$

考虑到 $\Delta E_e \sim e^2$, $\Delta E_s \sim g_s$, 则有

$$g_s / e \sim 10^{-3}. \quad (6-83)$$

§ 6—2 轻子族粒子间的相互作用

这族粒子具有 $S(T_d)$ 点群对称性, 其生成元所满足的代数是 $A(T_d)$, 它可以分解成如下几个子代数之直和(见(3—16)式):

$$A(T_d) = 5A_0 \oplus A_1^S \oplus A_2^F \oplus A_2^C \quad (6-84)$$

其中上标 S, F, C 分别对应自旋、味、色。同(uds)夸克族相似, A_1^S 将导致自旋之间 $SU_S(2)$ 规范相互作用, A_2^F 将导致味之间 $SU_F(3)$ 规范相互作用, A_2^C 将导致色($e\mu\tau$)之间 $SU_C(3)$ 规范相互作用。由 § 6—1(III)中关于自旋相互作用的分析, 如果将自旋并入味或色态而成为自旋 1/2 的 Dirac 粒子, 则自旋之间的相互作用可以并入味(或色)之间的相互作用, 认为味(或色)规范场具有自旋为 1 的结构而得到统一处理。为此, 在以下讨论中不再单独讨论自旋之间的相互作用。

I 味旋动力学

味 A_2^F 的基态(含自旋)为左旋态(见(5—27)式),

$$\Psi_F = \begin{pmatrix} l_\nu \\ l \\ l^C \end{pmatrix}_L \quad (6-85)$$

由于时空的对称性, 当只考虑味(旋)态时, 粒子态 Ψ_F 的规范变换是

$$\Psi_F' = \exp[-i\omega^\gamma(\mathbf{r}, t)\tau_\gamma - i\omega^i(\mathbf{r}, t)T_i] \Psi_F \quad (6-86)$$

其中 $\tau_\gamma \in A_1^S$, $T_i \in A_2^F$, 由于规范不变性得协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_F A_\mu^i(\mathbf{r}, t)T_i \quad (6-87)$$

所以包括规范场与 Ψ_F 的相互作用的拉氏量

$$L = i\bar{\Psi}_F \gamma_\mu \partial_\mu \Psi_F + \frac{g_F}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_F \gamma_\mu A_\mu(\vec{r}, t) \Psi_F - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6-88)$$

其中 $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)T_i + g_F f_{ij}^k A_\mu^i A_\nu^j T_k$ (6-89)

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} & \bar{W}_\mu^1 & \bar{W}_\mu^2 \\ W_\mu^1 & -\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} & \bar{W}_\mu^3 \\ W_\mu^2 & W_\mu^3 & -\frac{2A_\mu^8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (6-90)$$

$$W_\mu^1 = \frac{A_\mu^4 + iA_\mu^5}{\sqrt{2}}, W_\mu^2 = \frac{A_\mu^6 + iA_\mu^7}{\sqrt{2}}, W_\mu^3 = \frac{A_\mu^8}{\sqrt{2}}, \quad (6-91)$$

代入(6—88)式使得粒子与规范场的相互作用项为

$$L_{fg} = \frac{g_F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{l}_{\nu_L} & \bar{l}_L & \bar{l}_L^c \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} & \bar{W}_\mu^1 & \bar{W}_\mu^2 \\ W_\mu^1 & -\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} & \bar{W}_\mu^3 \\ W_\mu^2 & W_\mu^3 & -\frac{2A_\mu^8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\nu_L} \\ l_L \\ l_L^c \end{pmatrix} \quad (6-92)$$

考虑到^(3 0) $l_L^c = c\bar{l}_R^T, l_R^c = c\bar{l}_L^T$ (其中 c 为常数算子, 在 Dirac 表象中它为 $c = i\gamma_2\gamma_4$), 则对规范场某些分量:

$$\bar{l}_{\nu_L}\gamma_\mu\bar{W}_\mu^2l_L^c = 0, \bar{l}_L^c\gamma_\mu\bar{W}_\mu^3l_L^c = 0, \bar{l}_L^c\gamma_\mu\bar{W}_\mu^2l_{\nu_L} = 0, \bar{l}_L^c\gamma_\mu\bar{W}_\mu^3l_L = 0, \bar{l}_L^c\gamma_\mu\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)A_\mu^8l_L^c = -\bar{l}_R\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)A_\mu^8l_R, \quad (6-93)$$

将(6-93)代入(6-92)得到

$$L_{fg} = \frac{g_F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{l}_\nu & \bar{l} \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma_5}{2} \left(\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} \right) & \frac{1+\gamma_5}{2} \bar{W}_\mu^1 \\ \frac{1+\gamma_5}{2} W_\mu^1 & \frac{1+\gamma_5}{2} \left(-\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} \right) + \frac{3-\gamma_5}{2} \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\nu \\ l \end{pmatrix} \quad (6-94)$$

这个相互作用表明: 荷电流是纯 V-A 型流; 中微子间的中性流也是纯 V-A 型流; 轻子间的中性流是 V-A 型但不是纯 V-A 型中性流. 定性上, 这与轻子现有实验完全相符, 更能使人信服的是以下定量结果。

$$\text{令 } \alpha Z_\mu = \frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}}, A_\mu = aA_\mu^3 + bA_\mu^8 \quad (6-95)$$

其中 α, a, b 均是待定常数。将(6-95)式代入(6-94)式, 相互作用可改写为

$$L_{fg} = \frac{g_F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{l}_\nu & \bar{l} \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma_5}{2} \alpha Z_\mu & \frac{1+\gamma_5}{2} W_\mu^+ \\ \frac{1+\gamma_5}{2} W_\mu^- & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3b-a}} A_\mu + \left(\frac{b+\sqrt{3}a}{2} - \frac{\gamma_5}{2} \right) \alpha Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\nu \\ l \end{pmatrix} \quad (6-96)$$

其中 $W_\mu^- \equiv W_\mu^1, W_\mu^+ \equiv \bar{W}_\mu^1$ 。为了与 GWS 模型比较, 写出其相应拉氏量为

$$L_{fg}^{GWS} = \frac{g_F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{l}_\nu & \bar{l} \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma_5}{2} \rho Z_\mu & \frac{1+\gamma_5}{2} W_\mu^+ \\ \frac{1+\gamma_5}{2} W_\mu^- & \chi A_\mu + \rho(4\sin^2\theta_w - 1 - \gamma_5) Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_\nu \\ l \end{pmatrix} \quad (6-97)$$

其中: $g \sin\theta_w = g' \cos\theta_w = e, \theta_w$ 是 GWS 模型中的温伯格角,

$$\rho = \frac{\sqrt{2(g^2 + g'^2)}}{4g}, \chi = -\frac{\sqrt{2}g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

如果他们是同一理论，则下面关系：

$$\alpha \frac{g_F}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{4g}, g_F = g, \frac{g_F}{\sqrt{3b-a}} = -e,$$

$$\frac{\frac{\alpha g_F}{\sqrt{2}}(b + \sqrt{3}a)}{\frac{a}{\sqrt{3}} - b} = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}(4\sin^2 \theta_W - 1)}{2} \quad (6-98)$$

(1) 如果要求(6-95)的转动是纯转动，就得到

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6-99)$$

根据(6-98)的关系可以算出

$$\sin^2 \theta_W = \frac{1}{4}, g_F = 2e = \sqrt{\frac{16\pi}{137}} \quad (6-100)$$

如同对(uds)夸克的 Higgs 场相同的考虑,(见(6-59)~(6-66)式)，容易得到规范粒子 W^\pm , Z^0 的质量为

$$m_{W^\pm} = \alpha m_{Z^0} = \frac{g_F l_0}{\sqrt{2}} \quad (6-101)$$

由 1983 年 UA₁ 组的实验值⁽³⁶⁾

$$M_{W^\pm} = 80.9 \pm 1.5 \pm 3.0 \text{ GeV} \quad (6-102)$$

可以较精确地算出 l_0 的值

$$l_0 = (1.89 \pm 0.08) \times 10^2 \text{ GeV} \quad (6-103)$$

相当于尺度

$$l_0 = \frac{hc}{E_{l_0}} = (6.6 \pm 0.3) \times 10^{-18} \text{ m} \quad (6-104)$$

从一个简单的考虑:(6-95)式变换是纯转动出发，我们从理论上得到温伯格角 $\theta_W = 30^\circ$ ，

并且得到 W^\pm 粒子与 Z^0 粒子质量之比为 $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。这与实验符合相当好，足见我的理论的合

理性，进而由实验测得的 W^\pm 粒子质量，得到了真空元胞的尺度 l_0 。

(2) 反过来，如果我们将 GWS 模型看成是实验结果，将 $\sin^2 \theta_W = 0.224 \pm 0.02$ 代入(6-98)式，就可以得满足现有实验值的 α , a , b , g_F 为

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.802 \\ a &= 0.259 \\ b &= -0.506 \\ g_F &= 0.344 \end{aligned} \quad (6-105)$$

从而由(6-102)的实验值，根据(6-101)可以算出

$$l_0 = (3.3 \pm 0.2) \times 10^2 \text{GeV} \quad (6-106)$$

相当于真空尺度

$$l_0 = (3.8 \pm 0.2) \times 10^{-18} \text{m} \quad (6-107)$$

结合(6-95)式, 从(6-105)式结果知, (6-95)式的转动不再是单纯转动。

到此为止, 我构造了与实验完全相符的轻子间味动力学。

II 色(旋)动力学

这族粒子有三基色为 $(e\mu\tau)$, 色 A^c_2 李代数的基态(包含自旋)为一左旋态(见(5-27)式),

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (6-106)$$

由于时空结构的对称性, 当只考虑色(旋)态时, 粒子态 Ψ_c 的规范变换是

$$\Psi'_c(\vec{r}, t) = \exp[-i\omega^\gamma(\vec{r}, t)\tau_\gamma - i\omega^i(\vec{r}, t)T_i] \Psi_c(\vec{r}, t) \quad (6-109)$$

其中 $\tau_\gamma \in A^s_1, T_i \in A^c_2$ 。由于规范不变得协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_c A^i_\mu(\vec{r}, t)T_i \quad (6-110)$$

所以有色(旋)态之间的色相互作用项为

$$L^c_{fg} = \frac{g_c}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \quad \bar{\mu}_L \quad \bar{\tau}_L) \gamma_\mu \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & -(G_{11} + G_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (6-111)$$

其中 g_c 是色 $(e\mu\tau)_L$ 之间色相互作用耦合常数。

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}}, G_{12} = \frac{A_\mu^1 - iA_\mu^2}{\sqrt{2}}, G_{13} = \frac{A_\mu^4 - iA_\mu^5}{\sqrt{2}}, G_{21} = \frac{A_\mu^1 + iA_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ G_{22} &= -\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}}, G_{23} = \frac{A_\mu^6 - iA_\mu^7}{\sqrt{2}}, G_{31} = \frac{A_\mu^4 + iA_\mu^5}{\sqrt{2}}, G_{32} = \frac{A_\mu^6 + iA_\mu^7}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6-112)$$

是八个自旋为 1 的矢量场, 称为胶子场。它与(uds)夸克的色(RBG)之间的相互作用胶子场类似, 不同的是这时的色是 $(e\mu\tau)$ 。

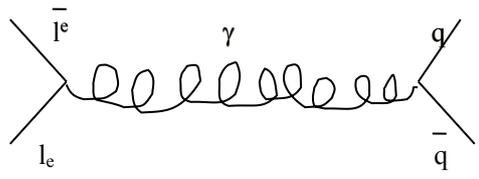
色相互作用(6-111)式告诉我们, 色 $(e\mu\tau)$ 之间的相互作用是纯 V-A 型流。它预示在色相互作用下, 色 $e\mu\tau$ 之间可以相互转换。即每色轻子数不再守恒。但这可能是在高能水平上的事。

III R 值

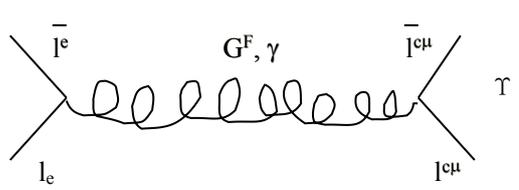
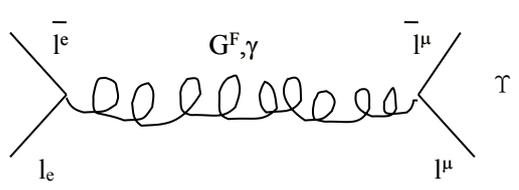
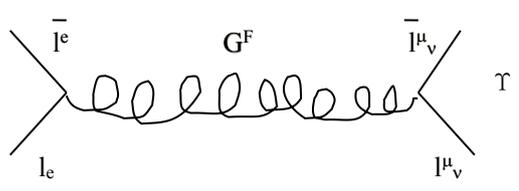
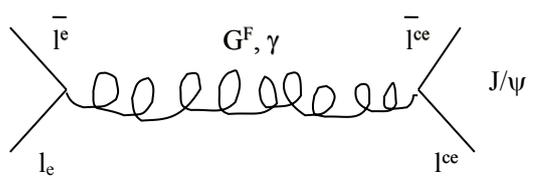
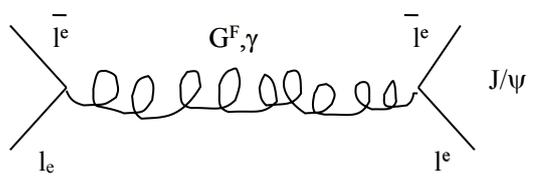
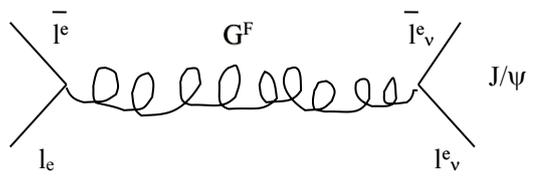
现在通过正负电子碰撞的产生率之比 R 来再次说明理论的合理性, 由 R 的定义

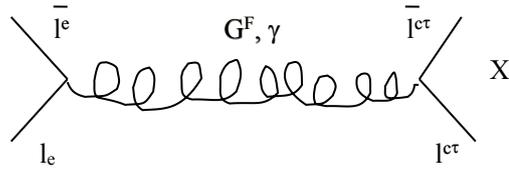
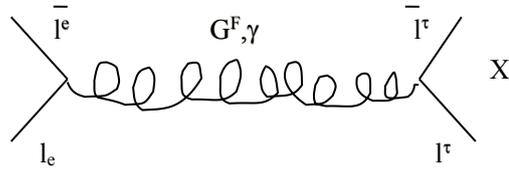
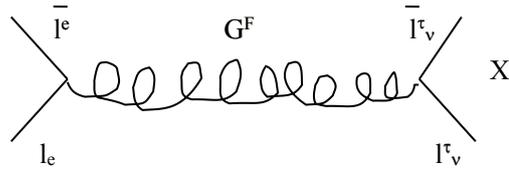
$$R = \frac{\sum e\bar{e} \rightarrow q\bar{q}(\text{强子})}{e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}} \quad (6-113)$$

这是在通常的夸克-轻子理论中所得结果, 这里强子包括了所谓“cbt”夸克。而在我们的理论中, “cbt”夸克实际上就是轻子。正反电子碰撞产物的费曼图有如下几种:



(uds)族强子, γ 是光子
 G^F 是味规范场





这样，(1) 当 $(e\bar{e})$ [即 $l^e\bar{l}^e$] 能量只是够产生 uds 夸克， $E < 3100\text{MeV}$ ，时，

$$R = \frac{3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right]}{1} = 2$$

(2) 当 $(e\bar{e})$ 能量只够产生(uds)类粒子和 J/Ψ 粒子时，即 $3100\text{MeV} < E < 9460\text{MeV}$ ，

$$R = \frac{3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] + 0^2 + 1^2 + (-1)^2}{1} = 4$$

(3) 当 $(e\bar{e})$ 能量只是够产生(uds)类， J/Ψ ， Υ 类粒时， $9460\text{MeV} < E < E_x(?)$ ，

$$R = \frac{3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] + 2[0^2 + 1^2 + (-1)^2]}{1} = 6$$

(4) 当 $(e\bar{e})$ 能量够产生所有类粒子时， $E > E_x(?)$ ，

$$R = \frac{3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] + 3[0^2 + 1^2 + (-1)^2]}{1} = 8$$

将以上结果做图则为

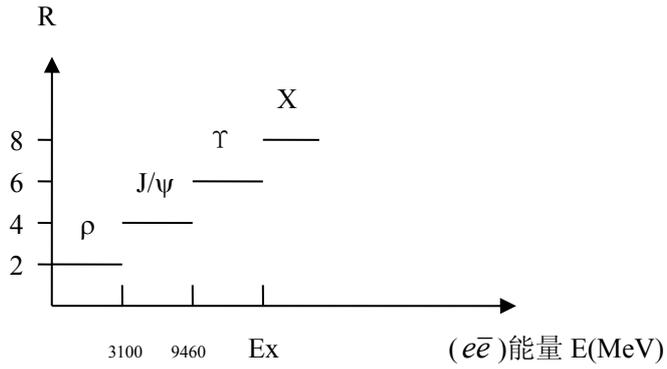
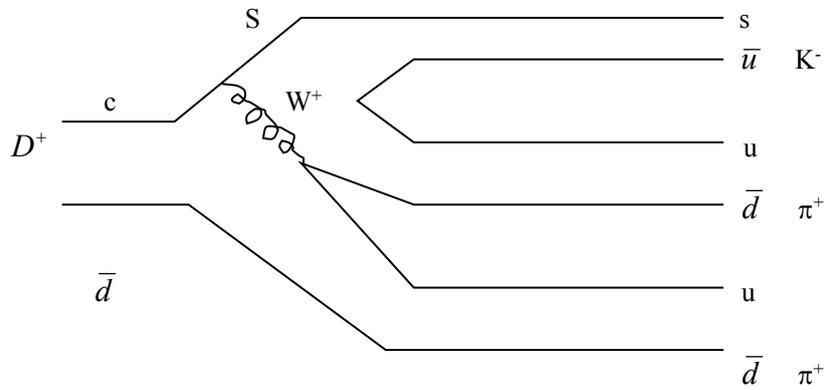


图 6-2 R-E($e\bar{e}$)关系

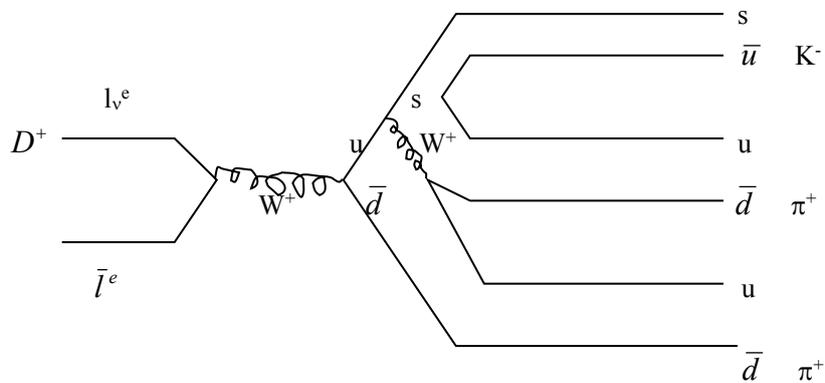
以上的估计与实验符合相当好⁽²²⁾。并且比通常的夸克理论要好。

在结束这一节时，应明确指出 charm 数是不必要的。在以前的夸克理论中，有一张非常漂亮的带 charm 数介子 D^+ 通过夸克之间的弱相互作用衰变图⁽³¹⁾：



$$\text{衰变 } D^+ \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^+ \quad (6-114)$$

这里 $D^+ = c\bar{d}$ ，拥有 charm 数。而在我们的模型中， $D^+ = l^e\bar{l}^e$ ，我们也可以通过下面这张同样合理的图来说明衰变(6-114)：



这就是说，从衰变产物也并不一定要求 charm 数。用我的模型也可以解释以前用 cbt 夸克所

能解释的实验。

到目前为止，我建立了决定于空间结构的统一的除引力外的规范相互作用理论，在下一节，我将专门讨论引力相互作用。在引力理论建立之后，我们将看到，引力相互作用与其他三种相互作用（味、色、旋）是统一于时空结构的对称性的。

§ 7 引力相互作用

爱因斯坦广义相对论是迄今最完善的引力相互作用理论。它为水星进动等一系列实验所证明⁽³²⁾，在数学处理中有非常美的形式⁽³³⁾。

为了与我的引力理论做比较，我将先将爱因斯坦广义相对论用四维连续时空纯几何的形式给出，并指出其不足之处。

§ 7-1 引子

在有物质存在的情况下，引力作用量的形式为

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} (R + L) \quad (7-1)$$

式中符号具有通常意义。这里要指出的是：(1) 在有物质场(拉氏密度)L之后，由于这部分并不是几何化的，在时空中得不到几何解释。故这样的时空理论有人为的性质，即时空完全由人为加入的物质的性质而决定。从几何上讲，这不是很自然的。(2) 一般认为 $g_{\mu\nu}$ 是引力场，而将 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ 看成是 $g_{\mu\nu}$ 的泛函，其关系为：

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (g_{\mu\tau,\nu} + g_{\nu\tau,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}) \quad (7-2)$$

这在几何上并不令人满意。我将用几何的方法分析爱因斯坦引力理论(7-1)的各个符号的几何意义，指出描述一个时空应该用到哪些量并对上述两点做出新的回答。

§ 7-2 描述时空

1、底流形 M，在一般的引力问题中，M 可以取成 R^4 。也可以是 $R^3 \times S$ ，但等效原理告诉我们，局部地 M 应是 R^4 。从描述任何时空的观点出发，M 可以是任意一个流形。在下面的讨论中，我们认为 M 是一个任意流形。

2、有了 M 之后，就可以自然地定义一族函数 F，使得映射 $f: M \rightarrow R^1$ 是任意阶连续函数 (C^∞)，这里 $f \in F$ 。

3、有了 M 之后(自然有了 F)，在 M 上任意一点 q 都存在无穷多个映射 $v: f \rightarrow R^1$ 。这些映射就是切矢，它们构成一个切矢空间。M 上每一 q 都有一个切矢空间 V_q ，M 上各不同点的切空间维数相等，但 M 上不同点 q、q' 的切空间 V_q 、 $V_{q'}$ 之间是没有任何联系的。如果在 M 上每一点切空间中指定一个切矢量，则该指定就构成了 M 上的一个切矢量场。

4、有了 M 之后(自然地有了 F、 V_q , $q \in M$)，总会有许多线性映射 $f^*: V_q \rightarrow R^1$ 。这些线性映射的集合构成了 q 点的一个线性空间——对偶空间 V_q^* 。因此，有了 M 之后，自然地在 M 上每一点有一个对偶空间。但是，同一点 q 上的切空间 V_q 和对偶空间 V_q^* 之间没有对应关系。一个对偶矢量场也可以通过给 M 上每一点的对偶空间中指定一个对偶矢量来实现。

5、有了 M 之后(自然地有了 F 、 V_q 、 V_q^* ， $q \in M$)，我们在 M 上任一点 q 就可以定义

$$T: \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ 个}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ 个}} \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (7-3)$$

型多重线性映射，这些映射的全体构成 q 上的一个 $T(k, l)$ 型张量空间，对每一类映射(张量)在 M 上每一点指定一个映射，则构成了一个 (k, l) 型张量场。

6、时空描述。以上均是数学分析，没有物理内容。那么，一个物理的时空是什么呢?那就是将数学上可变的部份给定，并给出的一套不同点之间的比较办法。

首先是给定一个底流形。爱因斯坦及后来人对这点说得并不多，例如，何谓给定?倒是在后两点上给出了很好回答。

给定了 M 之后，就自然地有了流形 M 上每一点的切矢量空间 V_q 和对偶空间 V_q^* ，如果给定了 V_q 与 V_q^* 内矢量之间一一对应关系，即映射

$$g: V_q \rightarrow V_q^* \quad (q \in M) \quad (7-4)$$

则就给定了 M 上的内积定义，也就是给定了无穷小位移大小的定义(即任意两邻近点间的距离)

$$ds^2 = g_{ab} V^a V^b = V^a V_a \quad (\text{对任意 } V_a, V_b \in V^*, V^a, V^b \in V) \quad (7-5)$$

接下来，由于在 M 上每一点均有这种(7-5)式那样的内积定义，但 M 上不同点之间的内积定义并没有什么关系。如果将这种不同点的内积之间的关系给定，就可以在不同点进行比较了。这正是联络 Γ^c_{ab} 的功能。

知道了 $(M, g_{ab}, \Gamma^c_{ab})$ 之后，流形 M 上任何张量都可以进行描述了。也就是说，时空完全由 $(M, g_{ab}, \Gamma^c_{ab})$ 三者描述。这也意味着，时空的作用量只与这三者有关，而与其它无关。然而，按现行爱因斯坦引力理论，除了这三者之外，还有物质场(见(7-1)式)，即预先在 M 上指定一个张量场。这在时空描述的数学框架内是不可接受的。然而，实验证明时空几何决定于物质场，那么物质到底是什么?物质场到底是怎样来影响时空几何的?由于， g_{ab}, Γ^c_{ab} 只是一种物理指定，它是决定于物质场的，它不能负载物质场。唯一可能负载物质场的只有剩下的流形 M 。下面的分析也恰好证明必是 M 。

§ 7-3 纯几何化的引力作用量

除了(7-1)式中非几何化的物质场外，将物质场归之于流形 M 的结构之后，几何化的引力作用量为

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} R \quad (7-6)$$

其中 R 是时空的标量曲率。我们来看只有一个点粒子的情形，在 M 中，如果没有这一点粒子则 $M = \mathbb{R}^4$ ，而加入这一点粒子后，流形可以近似看成是 \mathbb{R}^4 中挖掉一点之后剩下的部分， $M = \mathbb{R}^4 - P$ ，这样，在这个有点粒子 P 的时空中，(7-6)式的作用量为：

$$S = \int_{\mathbb{R}^4 - P} d^4x \sqrt{-g} R \quad (7-7)$$

(7-7)式是说， R 在除 P 点之外的 \mathbb{R}^4 均有定义，如果为了计算上的方便，我们在 P 点也定义一个数 R_p ，并将总的积分区间扩大到整个 \mathbb{R}^4 ，则应该在作用量的被积函数中减去扩大的部分，即

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - c\delta(p)) \quad (7-8)$$

其中 c 是描述点粒子 P 的性质并影响 R 的一个常数。熟悉广义相对论的读者马上就可以看出，

(7-8)式的解就是史瓦西外解⁽³²⁾.

如果将(7-8)式中 $-c\delta(P)$ 记为

$$L = -c\delta(P) \quad (7-9)$$

则(7-8)式就成为(7-1)式有物质场 L 的引力场作用量的形式, 不过这时的 $M=R^4$.

对于多个质点的情形, 类似可给出(7-8)那样的形式,

$$S = \int_{R^4} d^4x \sqrt{-g} (R + L) \quad (7-10)$$

(7-10)式等同于有物质场的情形时的爱因斯坦广义相对论。这显示我们对(7-6)式的考虑是恰当的, 即物质场就是流形 M 本身的结构, 正符合我这个理论前面的结论。下面我就从时空结构(即 M)出发去看引力场如何决定于物质结构。

§ 7-4 分立时空的引力场

在前几节, 我建立了新的时空结构, 这就是:真空流形为 $\mathcal{A}_1 \times T$, 质空流形是变形后的 $\mathcal{A}_1 \times T$, 或有空穴或有空隙填隙元胞或元胞形变, 这里 T 是时间格子。这两种流形均是分立流形, 均不能用连续的理论来处理。然而, 在这种流形中, 有位置矢量组成的矢量结构: 以 $P \in \mathcal{A}_1 \times T$ 为原点, 以周围所有元胞的中心为终点, 则有一个由无穷多个矢量组成的结构。在真空中, 这无穷多个矢量满足 \mathcal{A}_1 上的 O_h 或 T_d 对称性, 而在质空中, 这无穷多个矢量满足 \mathcal{A}_1 上 $S(O_h)$ 或 $S(T_d)$ ($= \{R(\gamma_\alpha^i)T_\alpha^{-1}\}$) 的对称性。这种矢量结构, 在不同的质空具有不同的形式, 而质空则与粒子态是相联系的, 所以, 粒子态实际上就是以空穴或空隙填隙元胞中心为原点的一种特定矢量结构。在质空中, 这样的矢量结构由于对称性 $S(O_h)$ 或 $S(T_d)$, 使得只有一些特别的矢量结构才是可能的, 这些特别的矢量结构就是不同的粒子态。如果在 P 点引入一个连续的矢量空间, 那么, 这种矢量结构就是相当于在这个连续的矢量空间中指定一些分立点矢量构成一种特定的矢量结构而成为粒子态, 这表明, 在我的理论中, 如果假设 P 点存在一个连续的切空间, 那么粒子态在 P 点不是用一个矢量来描述, 而是指定一批(无限多个分立)切矢量来描述。

如果在真空中, 则在 $\mathcal{A}_1 \times T$ 中每一点 P 的矢量结构均相同; 如果是在质空中, 每一点 P 的矢量结构原则上是不同的。要比较不同点的矢量结构, 就得引入连络的概念。

在过去的理论中, 切矢场在每一点 P 指定一个切矢。用纤维丛理论的语言来说, 切矢场就相当于在切丛上每一 P 的纤维上指定一点而构成截面, 如图 7-1 所示。

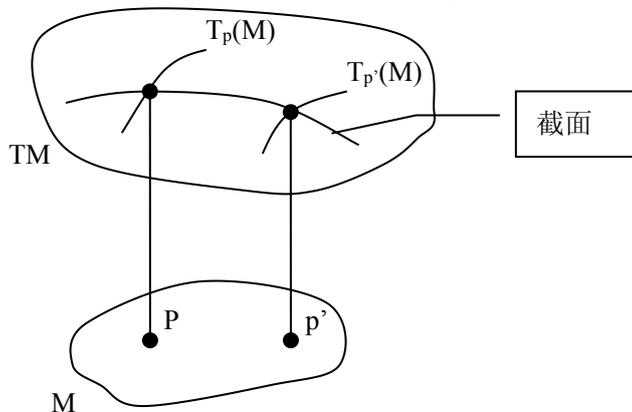


图 7-1 纤维上的截面

在我的理论中, 粒子态——切矢量结构, 则相当于是 在纤维 $T_P(M)$ 上指定的不是一个点, 而是无限多个分立点。这样, 粒子态不再只是一个截面, 而是许多截面组成的截面组, 如图 7-2 所示。

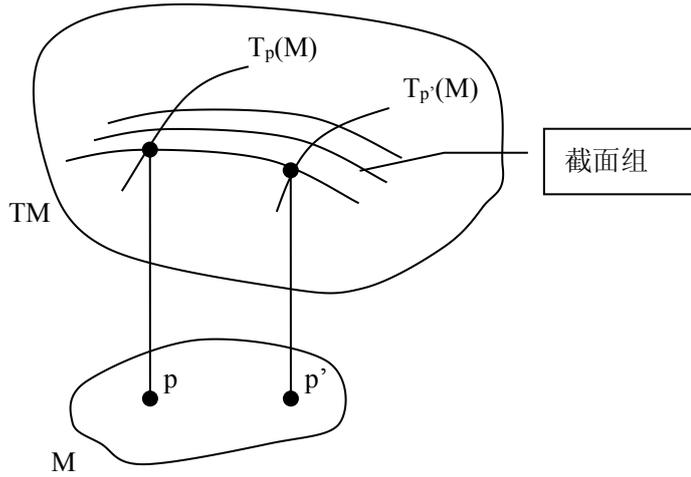


图 7-2 纤维丛上的截面组

从以上的讨论中引发我们去用连续的情形来描述物理上分立的情况。做法如下： $\mathcal{A}_1 \times T$ 可以看成是 4 维光滑流形 R_4 上的一些分立的点构成的集合。就是说：(1) 每个属于 $\mathcal{A}_1 \times T$ 的分立点 p 均自然地有了一个 4 维切空间，以 p 点为原点的矢量结构就可以用 p 点的切空间来描述。(2) 在 $\mathcal{A}_1 \times T$ 上的一轨迹应是一些不连接的点而没有线。但我们可以用光滑流形 R_4 上一条光滑(C^∞)参数曲线来逼近，使轨迹上的分立点成为这条曲线上的分立点。这样，我的理论可以用连续的方法来描述。

在连续情形， p 点和 p' 点的纤维分别为 $T_p(M)$ 和 $T_{p'}(M)$ 。而 $T_p(M)$ 和 $T_{p'}(M)$ 的对称性均是 $GL(m, R)$ 。则切丛上的连络——仿射连络，就完全由物质场 $A^\alpha_{\mu}(\mathbf{r}, t)$ 决定⁽³⁴⁾

$$\Gamma_{\mu k}^{\nu} = \left(A_{\mu}^{\alpha} \frac{\lambda^{\alpha}}{2i} \right)_k \quad (7-11)$$

其中 λ^{α} 是 $GL(m, R)$ 的生成元。

在我的模型中，纤维 $T_p(M)$ 和 $T_{p'}(M)$ 的对称性还是 $GL(m, R)$ 。然而，物理上有意义的并不是这个对称性，而是在 $T_p(M)$ 和 $T_{p'}(M)$ 上指定的无穷多个分立点的对称性。即 p 和 p' 点矢量结构的对称性。原则上，在质空中，不同点 p 和 p' 的矢量结构的对称性不同。

设 4 维光滑流形 M 中，任取 M 的一坐标系 $(U; \mathbf{u}^i)$ ，则有自然基底 $\{s_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, 1 \leq i \leq 4\}$ 构成切丛 $T(M)$ 在 U 上的局部标架场。在切丛上给定一连络 D ，则⁽³⁷⁾

$$Ds_i = \omega_i^j \otimes s_j = \Gamma_{ik}^j du^k \otimes s_j \quad (7-12)$$

在 M 中并没有限定连络为多少，它是之后给定的。在这个没有给定连络的仿射空间 M 中，对 M 中一点 p ，完全描述其性质的是无穷多个切矢——以 P 点为原点的矢量位置的集合。

$\{\hat{r}_{pn}^j, n=0, 1, 2, \dots\}$ ，而这个矢量 \hat{r}_{pn}^j 完全可以用自然基底 $\{s_i\}$ 表示出来，

$$\hat{r}_{(pn)i}^j = X_{(pn)i}^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (7-13)$$

其中 $X_{(pn)i}^j$ 是非退化的 4×4 阶矩阵，对不同原点 p ，对不同矢量 n 有不同值，由 $\mathcal{A}_1 \times T$ 的结构完全决定。同时，它也是 $GL(4, R)$ 的一个元素。

$\hat{r}_{(pn)i}^j$ 实质上是切丛 $T(M)$ 中纤维 $T_p(M)$ 中许多分立点， (p, \hat{r}_{pn}^j) 就可以在一定的条件下

构成截面组，物理上，这些截面组相互平行(即没有二个元胞重合的情形)，即要求：

$$D\hat{r}_{(pn)i} = 0 \quad (7-14)$$

由(7-12)和(7-13)式，(7-14)式变成

$$\frac{dX_{(pn)i}^k}{du^l} + X_{(pn)i}^j \Gamma_{jl}^k = 0 \quad (7-15)$$

由于 $X_{(pn)i}^j$ 是完全由真空 $\mathcal{A}_1 \times T$ 变形后的质空的结构决定的，对一定物质场(或真空)它是已知的，则由(7-15)式可以求得连络

$$\Gamma_{j'l}^k = -X_{(pn)j}^{*i} \frac{dX_{(pn)i}^k}{du^l} \quad (7-16)$$

其中

$$X_{(pn)j}^{*i} X_{(pn)i}^j = \delta_j^i \quad (7-17)$$

(7-16)式表明质空中的连络完全由质空结构决定，也就是说：引力场完全由物质场决定。

(a) 在真空中， $X_{(pn)i}^k$ 是一常数矩阵

$$\frac{dX_{(pn)i}^k}{du^l} = 0 \rightarrow \Gamma_{jl}^k = 0 \quad (7-18)$$

即真空为平直的。

(b) 在质空中，($X_{(pn)i}^j$)与真空中有一偏离，这一偏离是与坐标有关的，记这一偏离为

$$[\Psi_{(pn)}(u^l)]_i^j \quad (7-19)$$

$$\text{则 } X_{(pn)i}^k = [\Psi_{(pn)}(u^l) X_{(pn)\text{真空}}]_i^k \quad (7-20)$$

所以

$$\Gamma_{j'l}^k = -[\Psi_{(pn)}^*(u^l)]_m^j [X_{(pn)\text{真空}}^*]_j^m \frac{d[\Psi_{(pn)}(u^l)]_\alpha^k}{du^l} [X_{(pn)\text{真空}}]_\alpha^l \quad (7-21)$$

这表明，在质空中，

$$\frac{d[\Psi_{(pn)}(u^l)]_\alpha^k}{du^l} \neq 0 \quad (7-22)$$

则 $\Gamma_{j'l}^k$ 一定不为零，考虑到 $\Gamma_{j'l}^k$ 是引力场，则质空一定是弯曲的，且引力场由(7-21)式可以求出。

以上两条结论定性上说是与爱因斯坦理论相符的。如果我们能通过前面粒子构造的结果而得知对应矢量结构 $\{\hat{r}_{(pn)}\}$ ，就可以对不同粒子态根据(7-21)式求引力场了。这原则上是可以做到的。

(7-16)式清楚表明，引力场来源于时空结构的平移特性。这完成了将基本相互作用统一于时空结构的梦想。

§ 8 总结

由给时空一个结构这种朴素的思想出发，通过构造空间结构——由元胞组成的 A_1 面心立方密排结构，定义了质空、真空和粒子，详细地给出了真空和质空的对称性。通过对时间的定义，完整地给出了分立时空中惯性系、速度、晶格波等一系列概念，并由真空的平移不变性和光是晶格波的观点得到了与爱因斯坦理论相同的狭义相对论。通过对质空点群对称性的详细分析，得到了具有决定性意义的局域规范不变形式(3-13)式，而这个规范不变性的生成元就是 O_h 或 T_d 群元素，生成元的代数就是 O_h 群代数 $A(O_h)$ 或 T_d 群代数 $A(T_d)$ ，通过对 $A(O_h)$ 或 $A(T_d)$ 的完整研究，发现它们是一些子李代数的直和。从而将粒子(即生成元的表示)分成 $A(O_h)$ 代数的表示和 $A(T_d)$ 群代数的表示，以及与局域规范生成元相对应的规范粒子。令人激动的是这个一揽子方案是成功的： $A(O_h)$ 群代数构造出所有 Gell-Mann(uds)夸克的表示， $A(T_d)$ 群代数构造出所有轻子和所谓“cvt”夸克所构造的粒子，局域规范理论给出的自旋之间、味之间、色之间的所有规范场与实验相符，例如：相互作用的手征性、流结构、规范场的结构、R 的值等。

特别值得指出的是轻子 (l_ν, l_L, l_L^c) 之间的味相互作用导致我们用理论方法算出了温伯格角 $\theta_w = 30^\circ$ 以及它与实验的精确一致。还有 Higgs 场的直观解释，证明了我的理论合理性。通过实验中 W^\pm, Z^0 粒子质量的测量，得到真空元胞的尺度 $l_0 \sim 10^{-18}m$ ，符合现有理论的估计。通过对爱因斯坦引力理论的分析，提出了纯几何化的引力场的基本概念是流形 M ，度规 g_{ab} 和联络 Γ_{ab}^c ，而物质场就是流形的具体结构，这正符合前面我的时空观点。通过对时空对称性的分析，得到了引力场由物质场决定的关系式(7-16)，表明了引力场源于质空的平移对称性。这样就使我们把引力相互作用和强、弱电等相互作用以及所有粒子统一于时空结构的对称性：时空的点群对称性导致强、弱电相互作用和所有粒子，时空的平移对称性导致引力相互作用。

附录 A T_d 和 O_h 群代数

A-1、群

T_d 是正四面体的完全对称性群，它是 O 群的 P 型非固有点群(不含空间反演)； O_h 群是正八面体的完全对称性群，它是 O 群的 I 型非固有点群(含空间反演)。因为 $O_h = O \times I$ ，而 T_d 群在数学上同构于 O 群，所以只研究 O 群。

O 群同构于置换群 S_4 ，其阶为 24，它们群元之间的对应关系如表 A-1，由 S_4 群的乘法表马上得到 O 群的乘法表 A-2，从这个乘法表可以看出集合 $(E, T_1, T_2, \dots, T_{11})$ 这 12 个元素构成 O 群的正规子群，它就是 T 群。

A-2、群代数

以 $A(0)$ 表示 0 群的群代数。由 0 群的乘法表 A-2 很容易看出 $A(0)$ 是李代数⁽³⁸⁾。(实际上, 几乎所有有限群的群代数均是李代数)。由于 $A(0)$ 的维数有限, 定能表示成已知半单李代数的直和。

从表 A-2 可知:

- (1) T_1, T_2, T_3 相互对易;
- (2) T_1 与 $T_{12}, T_{17}, T_{20}, T_{23}$ 对易;
 T_2 与 $T_{13}, T_{16}, T_{18}, T_{21}$ 对易;
 T_3 与 $T_{14}, T_{15}, T_{19}, T_{22}$ 对易;

$$\begin{aligned} \text{令 } H_1 &= T_1, & H_1' &= T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}; \\ H_2 &= T_2, & H_2' &= T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}; \\ H_3 &= T_3, & H_3' &= T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22}; \end{aligned} \quad (\text{A—1})$$

则有

$$[H_i, H_j] = 0, [H_i, H_j'] = 0, [H_i', H_j'] = 0, (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A—2})$$

它们有可能构成 Cartan 子代数。

$$\begin{aligned} \text{令 } E_\alpha &= T_4 + T_5 - T_6 - T_7, & E_\alpha' &= T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23}; \\ E_{-\alpha} &= T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}, & E_{-\alpha}' &= T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23}; \\ E_\beta &= T_4 - T_5 - T_6 + T_7, & E_\beta' &= T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22}; \\ E_{-\beta} &= T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}, & E_{-\beta}' &= T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22}; \\ E_{-(\alpha+\beta)} &= T_4 - T_5 + T_6 - T_7, & E_{-(\alpha+\beta)'} &= T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21}; \\ E_{(\alpha+\beta)} &= T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}, & E_{(\alpha+\beta)'} &= T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21}; \end{aligned} \quad (\text{A—3})$$

则可得表 A-3 所示结果。从表 A-3 可知

- (1) $H_i, E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}, E_{\pm(\alpha+\beta)}$ 构成一个 A_2 代数,
- (2) $H_i', E_{\pm\alpha}', E_{\pm\beta}', E_{\pm(\alpha+\beta)'}$ 构成另一个 A_2' 代数,

但它们均不是 $A(0)$ 的子代数。我们的目的是要找到它们的直和分解。

令:

$$\begin{aligned} H_i^\pm &= H_i \pm 1/2H_i', & H_2^\pm &= H_2 \pm 1/2H_2', & H_3^\pm &= H_3 \pm 1/2H_3', \\ E_\alpha^\pm &= E_\alpha \pm E_\alpha', & E_\beta^\pm &= E_\beta \pm E_\beta', & E_{(\alpha+\beta)^\pm} &= E_{(\alpha+\beta)} \pm E_{(\alpha+\beta)'}, \\ E_{-\alpha}^\pm &= E_{-\alpha} \pm E_{-\alpha}', & E_{-\beta}^\pm &= E_{-\beta} \pm E_{-\beta}', & E_{-(\alpha+\beta)^\pm} &= E_{-(\alpha+\beta)} \pm E_{-(\alpha+\beta)'}, \end{aligned} \quad (\text{A—4})$$

则可得表 (A-4) 的结果, 表 A-4 结果表明: $H_i^+, E_{\pm\alpha}^+, E_{\pm\beta}^+, E_{\pm(\alpha+\beta)}^+$ 构成一个 A_2 代数; 而 $H_i^-, E_{\pm\alpha}^-, E_{\pm\beta}^-, E_{\pm(\alpha+\beta)}^-$ 构成另一个 A_2' 代数, 且它们均是 $A(0)$ 的子代数。

这样, 令:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{(H_1^+ - H_3^+)}{8\sqrt{3}}, & H_1' &= \frac{(H_1^- - H_3^-)}{8\sqrt{3}}, \\ H_2 &= \frac{(2H_2^+ - H_1^+ - H_3^+)}{32}, & H_2' &= \frac{(2H_2^- - H_1^- - H_3^-)}{32}, \\ E_{\pm\alpha} &= \frac{E_{\pm\alpha}^+}{8\sqrt{6}}, & E_{\pm\alpha}' &= \frac{E_{\pm\alpha}^-}{8\sqrt{6}}, \\ E_{\pm\beta} &= \frac{E_{\pm\beta}^+}{8\sqrt{6}}, & E_{\pm\beta}' &= \frac{E_{\pm\beta}^-}{8\sqrt{6}}, \end{aligned} \quad (\text{A—5})$$

$$E_{\pm(\alpha+\beta)} = \frac{E_{\pm(\alpha+\beta)}^+}{8\sqrt{6}}, \quad E'_{\pm(\alpha+\beta)} = \frac{E_{\pm(\alpha+\beta)}^-}{8\sqrt{6}},$$

则 $H_1, H_2, E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}, E_{\pm(\alpha+\beta)}$ 就是 A_2 的标准基, $H_1', H_2', E_{\pm\alpha}', E_{\pm\beta}', E_{\pm(\alpha+\beta)'}$ 就是 A_2' 的标准基, 它与 0 群生成元的关系是:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[T_1 - T_2 + \frac{1}{2} [(T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right], \\ H_2 &= \frac{1}{32} \left\{ 2T_2 - T_1 - T_3 + \frac{1}{2} [2(T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}) - (T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right\}, \\ E_\alpha &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 + T_5 - T_6 - T_7) + (T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23})], \\ E_{-\alpha} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}) + (T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23})], \\ E_\beta &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 - T_6 + T_7) - (T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22})], \\ E_{-\beta} &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}) - (T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22})], \\ E_{+(\alpha+\beta)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 + T_6 - T_7) + (T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21})], \\ E_{-(\alpha+\beta)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}) + (T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21})]^\circ. \end{aligned} \tag{A-6}$$

$$\begin{aligned} H_1' &= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[T_1 - T_2 - \frac{1}{2} [(T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right], \\ H_2' &= \frac{1}{32} \left\{ 2T_2 - T_1 - T_3 - \frac{1}{2} [2(T_{13} + T_{16} - T_{18} - T_{21}) - (T_{12} + T_{17} - T_{20} - T_{23}) - (T_{14} + T_{15} - T_{19} - T_{22})] \right\}, \\ E'_\alpha &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 + T_5 - T_6 - T_7) - (T_{12} - T_{17} - T_{20} + T_{23})], \\ E'_{-\alpha} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 + T_9 - T_{10} - T_{11}) - (T_{12} - T_{17} + T_{20} - T_{23})], \\ E'_\beta &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 - T_6 + T_7) + (T_{14} - T_{15} - T_{19} + T_{22})], \\ E'_{-\beta} &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 - T_{10} + T_{11}) + (T_{14} - T_{15} + T_{19} - T_{22})], \\ E'_{+(\alpha+\beta)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_4 - T_5 + T_6 - T_7) - (T_{13} - T_{16} - T_{18} + T_{21})], \\ E'_{-(\alpha+\beta)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} [(T_8 - T_9 + T_{10} - T_{11}) - (T_{13} - T_{16} + T_{18} - T_{21})]^\circ. \end{aligned} \tag{A-7}$$

除了以上 $2 \times 8 = 16$ 个组合之外, $A(0)$ 的 24 个元素还有另外 8 个独立的组合, 它们是

$$\begin{aligned} h_1 &= T_{12} + T_{17} + T_{20} + T_{23} \\ h_2 &= T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21} \\ h_3 &= T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22} \end{aligned} \tag{A-8}$$

$$\begin{aligned}
h_4 &= T_4 + T_5 + T_6 + T_7 - T_8 - T_9 - T_{10} - T_{11} \\
X_1 &= E \\
X_2 &= T_1 + T_2 + T_3 \\
X_3 &= T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 + T_{10} + T_{11} \\
X_4 &= T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} + T_{16} + T_{17} \\
X_5 &= T_{18} + T_{19} + T_{20} + T_{21} + T_{22} + T_{23}
\end{aligned} \tag{A-9}$$

其中 h_1, h_2, h_3, h_4 与 X_4, X_5 中只有五个独立组合, 由于群元类和的性质, 以上 8 个组合均与前两个 A_2, A_2' 的元素对易

$$\begin{aligned}
[h_i, X_j] &= 0 \\
[h_i, h_j] &\neq 0 \\
[X_i, X_j] &= 0
\end{aligned} \tag{A-10}$$

这表示, 5 个 X_i 已是单李代数 A_0 , 而 4 个 h_i (只有三个是独立的) 将会构成某种半单李代数。直接计算得:

$$\begin{aligned}
[h_1, h_2] &= -4h_4 \\
[h_2, h_3] &= -4h_4 \\
[h_3, h_1] &= -4h_4 \\
[h_3, h_4] &= 8h_2 - 8h_1 \\
[h_4, h_1] &= 8h_2 - 8h_3 \\
[h_4, h_2] &= 8h_3 - 8h_1
\end{aligned} \tag{A-11}$$

令: $Y_1 = h_4, Y_2 = h_1 - h_2, Y_3 = h_2 - h_3$
 $Y' = h_1 + h_2 + h_3 = X_4 + X_5$ (分离出去)

$$\begin{aligned}
\text{则有 } [Y_i, Y'] &= 0 \\
[Y_1, Y_2] &= 8Y_2 + 16Y_3 \\
[Y_1, Y_3] &= -16Y_2 - 8Y_3 \\
[Y_2, Y_3] &= -12Y_1
\end{aligned} \tag{A-12}$$

令 $A = i(\sqrt{3}/24) Y_1 = i(\sqrt{3}/24) (T_4 + T_5 + T_6 + T_7 - T_8 - T_9 - T_{10} - T_{11})$

$$\begin{aligned}
E_{\pm} &= (\sqrt{3}/4) ((Y_2 + Y_3)/2 \pm i(\sqrt{3}/2) Y_3) \\
&= (\sqrt{3}/4) (2(T_{12} + T_{17} + T_{20} + T_{23}) - (T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21}) - (T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22})) \\
&\quad \pm (3/4) i ((T_{13} + T_{16} + T_{18} + T_{21}) - (T_{14} + T_{15} + T_{19} + T_{22}))
\end{aligned} \tag{A-13}$$

则直接计算得到

$$\begin{aligned}
[A, E_{\pm}] &= \pm E_{\pm} \\
[E_+, E_-] &= A
\end{aligned} \tag{A-14}$$

这表明 A, E_{\pm} 满足 A_1 李代数, 且是标准基。到此, 得到了群代数 $A(0)$ 的直积分解为

$$A(0) = 5A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2' \tag{A-15}$$

A-3、 O_h 群代数 $A(O_h)$

按定义

$$O_h = \{T_i\} \cup \{T_i \sigma\}, T_i \in O$$

设

$$T_i^{\pm} = (1/2) (T_i \pm T_i \sigma) = P_{\pm} T_i \tag{A-16}$$

其中 $P_{\pm} = (1/2)(1 \pm \sigma)$ 。则有

$$\begin{aligned} [T_i^+, T_j^+] &= [T_i, T_j]P_+ = C_{ijk}T_k^+ \\ [T_i^-, T_j^-] &= [T_i, T_j]P_- = C_{ijk}T_k^- \\ [T_i^+, T_j^-] &= 0 \end{aligned} \tag{A-17}$$

其中 C_{ijk} 是 O 群代数的结构常数。则 (A-17) 式表明: (1) $\{T_i^+\}$, $\{T_i^-\}$ 分别构成一个与 O 群代数同构的群代数。(2) O_h 群代数是 $\{T_i^+\}$ 、 $\{T_i^-\}$ 群代数的直和, 即 $A(O_h) = A(O^+) \oplus A(O^-)$

A-4、 T_d 群代数

T_d 群代数的生成元如下

$$A(T_d) = \{T_i, T_{\alpha}\}, \quad i=0, 1, \dots, 11; \quad \alpha=12, 13, \dots, 23, \quad T_i, T_{\alpha} \in O$$

则有 $[T_i, T_j] = C_{ijk}T_k$

$$[T_{\alpha\sigma}, T_i] = C_{\alpha\beta}T_{\beta\sigma}, \quad [T_{\alpha\sigma}, T_{\beta\sigma}] = C_{\alpha\beta}T_j, \tag{A-18}$$

$$\text{令 } T_{\alpha'} = T_{\alpha\sigma}, \quad T_{i'} = T_i \tag{A-19}$$

则 $T_d = \{T_{i'}, T_{\alpha'}\}$ 与 O 群代数结构相同, 只是做了 (A-19) 代换。所以 T_d 群代数也可以分解为

$$A(T_d) = 5A_0^d \oplus A_1^d \oplus A_2^d \oplus A_2^{d'}$$

将 (A-6)、(A-7)、(A-9)、(A-13) 式分别做代换 (A-19) 即可得到标准基与生成元之间的关系见 (5-14) — (5-17) 式。

表 A-1 O 群与 S_4 群元之间的对应关系

代号	S_4	O	类
$T_0=E$	E	E	
T_1	(12)(34)	$C_4(001)$	$C_4^2(3)$
T_2	(13)(24)	$C_4(100)$	
T_3	(14)(23)	$C_4(010)$	
T_4	(123)	$C_3(1-11)$	$C_3'(8)$
T_5	(142)	$C_3(-111)$	
T_6	(134)	$C_3(11-1)$	
T_7	(243)	$C_3(111)$	
T_8	(132)	$C_3(1-11)$	
T_9	(124)	$C_3(-111)$	
T_{10}	(143)	$C_3(11-1)$	
T_{11}	(234)	$C_3(111)$	
T_{12}	(12)	$C_2(110)$	$C_2''(6)$
T_{13}	(13)	$C_2(011)$	
T_{14}	(14)	$C_2(101)$	
T_{15}	(23)	$C_2(-101)$	
T_{16}	(24)	$C_2(01-1)$	
T_{17}	(34)	$C_2(1-10)$	
T_{18}	(1234)	$C_4(100)$	$C_4(6)$
T_{19}	(1243)	$C_4(010)$	
T_{20}	(1324)	$C_4(001)$	
T_{21}	(1432)	$C_4(100)$	
T_{22}	(1342)	$C_4(010)$	
T_{23}	(1423)	$C_4(001)$	

表 A-2 O 群的乘法表

	E	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₁₂	T ₁₃	T ₁₄	T ₁₅	T ₁₆	T ₁₇	T ₁₈	T ₁₉	T ₂₀	T ₂₁	T ₂₂	T ₂₃	
(1) E	E	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₁₂	T ₁₃	T ₁₄	T ₁₅	T ₁₆	T ₁₇	T ₁₈	T ₁₉	T ₂₀	T ₂₁	T ₂₂	T ₂₃	E
(12)(34) T₁	T ₁	E	T ₃	T ₂	T ₇	T ₆	T ₅	T ₄	T ₁₀	T ₁₁	T ₈	T ₉	T ₁₇	T ₂₁	T ₂₂	T ₁₉	T ₁₈	T ₁₂	T ₁₆	T ₁₅	T ₂₃	T ₁₃	T ₁₄	T ₂₀	T ₁
(13)(24) T₂	T ₂	T ₃	E	T ₁	T ₅	T ₄	T ₇	T ₆	T ₁₁	T ₁₀	T ₉	T ₈	T ₂₃	T ₁₆	T ₁₉	T ₂₂	T ₁₃	T ₂₀	T ₂₁	T ₁₄	T ₁₇	T ₁₈	T ₁₅	T ₁₂	T ₂
(14)(23) T₃	T ₃	T ₂	T ₃	E	T ₆	T ₇	T ₄	T ₅	T ₉	T ₈	T ₁₁	T ₁₀	T ₂₀	T ₁₈	T ₁₅	T ₁₄	T ₂₁	T ₂₃	T ₁₃	T ₂₂	T ₁₂	T ₁₆	T ₁₉	T ₁₇	T ₃
(123) T₄	T ₄	T ₆	T ₇	T ₅	T ₈	T ₁₀	T ₁₁	T ₉	E	T ₂	T ₃	T ₁	T ₁₃	T ₁₅	T ₂₃	T ₁₂	T ₁₉	T ₁₈	T ₂₂	T ₂₀	T ₁₆	T ₁₄	T ₁₇	T ₂₁	T ₄
(142) T₅	T ₅	T ₇	T ₆	T ₄	T ₁₁	T ₉	T ₈	T ₁₀	T ₂	E	T ₁	T ₃	T ₁₆	T ₂₂	T ₁₂	T ₂₃	T ₁₄	T ₂₁	T ₁₅	T ₁₇	T ₁₃	T ₁₉	T ₂₀	T ₁₈	T ₅
(134) T₆	T ₆	T ₄	T ₅	T ₇	T ₉	T ₁₁	T ₁₀	T ₈	T ₃	T ₁	E	T ₂	T ₁₈	T ₁₄	T ₁₇	T ₂₀	T ₂₂	T ₁₃	T ₁₉	T ₁₂	T ₂₁	T ₁₅	T ₂₃	T ₁₆	T ₆
(243) T₇	T ₇	T ₅	T ₄	T ₆	T ₁₀	T ₈	T ₉	T ₁₁	T ₁	T ₃	T ₂	E	T ₂₁	T ₁₉	T ₂₀	T ₁₇	T ₁₅	T ₁₆	T ₁₄	T ₂₃	T ₁₈	T ₂₂	T ₁₂	T ₁₃	T ₇
(132) T₈	T ₈	T ₁₁	T ₉	T ₁₀	E	T ₃	T ₁	T ₂	T ₄	T ₇	T ₅	T ₆	T ₁₅	T ₁₂	T ₂₁	T ₁₃	T ₂₀	T ₂₂	T ₁₇	T ₁₆	T ₁₉	T ₂₃	T ₁₈	T ₁₄	T ₈
(124) T₉	T ₉	T ₁₀	T ₈	T ₁₁	T ₃	E	T ₂	T ₁	T ₆	T ₅	T ₇	T ₄	T ₁₄	T ₂₀	T ₁₆	T ₁₈	T ₁₂	T ₁₉	T ₂₃	T ₂₁	T ₂₂	T ₁₇	T ₁₃	T ₁₅	T ₉
(143) T₁₀	T ₁₀	T ₉	T ₁₁	T ₈	T ₁	T ₂	E	T ₃	T ₇	T ₄	T ₆	T ₅	T ₁₉	T ₁₇	T ₁₃	T ₂₁	T ₂₃	T ₁₄	T ₁₂	T ₁₈	T ₁₅	T ₂₀	T ₁₆	T ₂₂	T ₁₀
(234) T₁₁	T ₁₁	T ₈	T ₁₀	T ₉	T ₂	T ₁	T ₃	E	T ₅	T ₆	T ₄	T ₇	T ₂₂	T ₂₃	T ₁₈	T ₁₆	T ₁₇	T ₁₅	T ₂₀	T ₁₃	T ₁₄	T ₁₂	T ₂₁	T ₁₉	T ₁₁
(12) T₁₂	T ₁₂	T ₁₇	T ₂₀	T ₂₃	T ₁₅	T ₁₄	T ₂₂	T ₁₉	T ₁₃	T ₁₆	T ₂₁	T ₁₈	E	T ₈	T ₅	T ₄	T ₉	T ₁	T ₁₁	T ₇	T ₂	T ₁₀	T ₆	T ₃	T ₁₂
(13) T₁₃	T ₁₃	T ₁₈	T ₁₆	T ₂₁	T ₁₂	T ₂₃	T ₁₇	T ₂₀	T ₁₅	T ₁₉	T ₁₄	T ₂₂	T ₄	E	T ₁₀	T ₈	T ₂	T ₆	T ₁	T ₉	T ₇	T ₃	T ₁₁	T ₅	T ₁₃
(14) T₁₄	T ₁₄	T ₁₉	T ₂₂	T ₁₅	T ₁₈	T ₁₆	T ₁₃	T ₂₁	T ₂₀	T ₁₂	T ₁₇	T ₂₃	T ₉	T ₆	E	T ₃	T ₅	T ₁₀	T ₄	T ₁	T ₈	T ₇	T ₂	T ₁₁	T ₁₄
(23) T₁₅	T ₁₅	T ₂₂	T ₁₉	T ₁₄	T ₁₃	T ₂₁	T ₁₈	T ₁₆	T ₁₂	T ₂₀	T ₂₃	T ₁₇	T ₈	T ₄	T ₃	E	T ₇	T ₁₁	T ₆	T ₂	T ₉	T ₅	T ₁	T ₁₀	T ₁₅
(24) T₁₆	T ₁₆	T ₂₁	T ₁₃	T ₁₈	T ₂₃	T ₁₂	T ₂₀	T ₁₇	T ₂₂	T ₁₄	T ₁₉	T ₁₅	T ₅	T ₂	T ₉	T ₁₁	E	T ₇	T ₃	T ₁₀	T ₆	T ₁	T ₈	T ₄	T ₁₆
(34) T₁₇	T ₁₇	T ₁₂	T ₂₃	T ₂₀	T ₁₉	T ₂₂	T ₁₄	T ₁₅	T ₂₁	T ₁₈	T ₁₃	T ₁₆	T ₁	T ₁₀	T ₆	T ₇	T ₁₁	E	T ₉	T ₄	T ₃	T ₈	T ₅	T ₂	T ₁₇
(1234) T₁₈	T ₁₈	T ₁₃	T ₂₁	T ₁₆	T ₂₀	T ₁₇	T ₂₃	T ₁₂	T ₁₄	T ₂₂	T ₁₅	T ₁₉	T ₆	T ₃	T ₁₁	T ₉	T ₁	T ₄	T ₂	T ₈	T ₅	E	T ₁₀	T ₇	T ₁₈
(1243) T₁₉	T ₁₉	T ₁₄	T ₁₅	T ₂₂	T ₂₁	T ₁₃	T ₁₆	T ₁₈	T ₁₇	T ₂₃	T ₂₀	T ₁₂	T ₁₀	T ₇	T ₂	T ₁	T ₄	T ₉	T ₅	T ₃	T ₁₁	T ₆	E	T ₈	T ₁₉
(1324) T₂₀	T ₂₀	T ₂₃	T ₁₂	T ₁₇	T ₁₄	T ₁₅	T ₁₉	T ₂₂	T ₁₈	T ₂₁	T ₁₆	T ₁₃	T ₃	T ₉	T ₇	T ₆	T ₈	T ₂	T ₁₀	T ₅	T ₁	T ₁₁	T ₄	E	T ₂₀
(1432) T₂₁	T ₂₁	T ₁₆	T ₁₈	T ₁₃	T ₁₇	T ₂₀	T ₁₂	T ₂₃	T ₁₉	T ₁₅	T ₂₂	T ₁₄	T ₇	T ₁	T ₈	T ₁₀	T ₃	T ₅	E	T ₁₁	T ₄	T ₂	T ₉	T ₆	T ₂₁
(1342) T₂₂	T ₂₂	T ₁₅	T ₁₄	T ₁₉	T ₁₆	T ₁₈	T ₂₁	T ₁₃	T ₂₃	T ₁₇	T ₁₂	T ₂₀	T ₁₁	T ₅	T ₁	T ₂	T ₆	T ₈	T ₇	E	T ₁₀	T ₄	T ₃	T ₉	T ₂₂
(1423) T₂₃	T ₂₃	T ₂₀	T ₁₇	T ₁₂	T ₂₂	T ₁₉	T ₁₅	T ₁₄	T ₁₆	T ₁₃	T ₁₈	T ₂₁	T ₂	T ₁₁	T ₄	T ₅	T ₁₀	T ₃	T ₈	T ₆	E	T ₉	T ₇	T ₁	T ₂₃
	E	T₁	T₂	T₃	T₄	T₅	T₆	T₇	T₈	T₉	T₁₀	T₁₁	T₁₂	T₁₃	T₁₄	T₁₅	T₁₆	T₁₇	T₁₈	T₁₉	T₂₀	T₂₁	T₂₂	T₂₃	

表 A-3 $H_i, E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}, E_{\pm(\alpha+\beta)}, H'_i, E'_{\pm\alpha}, E'_{\pm\beta}, E'_{\pm(\alpha+\beta)}$ 的对易关系

$[H_1, E_{\pm\alpha}] = 0$	$[E_{-\beta}, E_{(\alpha+\beta)}] = 4E_{\alpha}$
$[H_1, E_{\pm\beta}] = \pm 2E_{\pm\beta}$	$[E_{-\beta}, E_{-(\alpha+\beta)}] = 0$
$[H_1, E_{\pm(\alpha+\beta)}] = \pm 2E_{\pm(\alpha+\beta)}$	$[E_{(\alpha+\beta)}, E_{-(\alpha+\beta)}] = 8H_1 - 8H_3$
$[H_2, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}$	
$[H_2, E_{\pm\beta}] = \mp 2E_{\pm\beta}$	
$[H_2, E_{\pm(\alpha+\beta)}] = 0$	$[H'_1, E_{\pm\alpha}] = 0$
$[H_3, E_{\pm\alpha}] = \mp 2E_{\pm\alpha}$	$[H'_1, E_{\pm\beta}] = \mp 4E_{\pm\beta}'$
$[H_3, E_{\pm\beta}] = 0$	$[H'_1, E_{\pm(\alpha+\beta)}] = \pm 4E_{\pm(\alpha+\beta)}'$
$[H_3, E_{\pm(\alpha+\beta)}] = \mp 2E_{\pm(\alpha+\beta)}$	$[H'_2, E_{\pm\alpha}] = \pm 4E_{\pm\alpha}'$
	$[H'_2, E_{\pm\beta}] = \pm 4E_{\pm\beta}'$
	$[H'_2, E_{\pm(\alpha+\beta)}] = 0$
$[H_1, E_{\pm\alpha}'] = 0$	$[H'_3, E_{\pm\alpha}] = \mp 4E_{\pm\alpha}'$
$[H_1, E_{\pm\beta}'] = \pm E_{\pm\beta}'$	$[H'_3, E_{\pm\beta}] = 0$
$[H_1, E_{\pm(\alpha+\beta)}'] = \pm 2E_{\pm(\alpha+\beta)}'$	$[H'_3, E_{\pm(\alpha+\beta)}] = \mp 4E_{\pm(\alpha+\beta)}'$
$[H_2, E_{\pm\alpha}'] = \pm E_{\pm\alpha}'$	
$[H_2, E_{\pm\beta}'] = \mp 2E_{\pm\beta}'$	
$[H_2, E_{\pm(\alpha+\beta)}'] = 0$	$[H'_1, E_{\pm\alpha}'] = 0$
$[H_3, E_{\pm\alpha}'] = \mp 2E_{\pm\alpha}'$	$[H'_1, E_{\pm\beta}'] = \mp 4E_{\pm\beta}$
$[H_3, E_{\pm\beta}'] = 0$	$[H'_1, E_{\pm(\alpha+\beta)}'] = \pm 4E_{\pm(\alpha+\beta)}$
$[H_3, E_{\pm(\alpha+\beta)}'] = \mp 2E_{\pm(\alpha+\beta)}'$	$[H'_2, E_{\pm\alpha}'] = \pm 4E_{\pm\alpha}$
	$[H'_2, E_{\pm\beta}'] = \pm 4E_{\pm\beta}$
	$[H'_2, E_{\pm(\alpha+\beta)}'] = 0$
$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = 8H_2 - 8H_3$	$[H'_3, E_{\pm\alpha}'] = \mp 4E_{\pm\alpha}$
$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = -4E_{(\alpha+\beta)}$	$[H'_3, E_{\pm\beta}'] = 0$
$[E_{\alpha}, E_{-\beta}] = 0$	$[H'_3, E_{\pm(\alpha+\beta)}'] = \mp 4E_{\pm(\alpha+\beta)}$
$[E_{\alpha}, E_{(\alpha+\beta)}] = 0$	
$[E_{\alpha}, E_{-(\alpha+\beta)}] = 4E_{-\beta}$	
$[E_{-\alpha}, E_{\beta}] = 0$	$[E_{\alpha}', E_{-\alpha}'] = 8H_2 - 8H_3$
$[E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = 4E_{-(\alpha+\beta)}$	$[E_{\alpha}', E_{\beta}'] = 4E_{(\alpha+\beta)}$
$[E_{-\alpha}, E_{(\alpha+\beta)}] = -4E_{\beta}$	$[E_{\alpha}', E_{-\beta}'] = 0$
$[E_{-\alpha}, E_{-(\alpha+\beta)}] = 0$	$[E_{\alpha}', E_{(\alpha+\beta)}'] = 0$
$[E_{\beta}, E_{-\beta}] = 8H_1 - 8H_2$	$[E_{\alpha}', E_{-(\alpha+\beta)}'] = 4E_{-\beta}$
$[E_{\beta}, E_{(\alpha+\beta)}] = 0$	$[E_{\alpha}', E_{\beta}'] = 0$
$[E_{\beta}, E_{-(\alpha+\beta)}] = -4E_{-\alpha}$	

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha'}, E_{\beta'}] &= -4E_{-(\alpha+\beta)} \\
[E_{\alpha'}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= -4E_{\beta} \\
[E_{\alpha'}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{\beta'}, E_{\beta'}] &= 8H_1 - 8H_2 \\
[E_{\beta'}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{\beta'}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 4E_{-\alpha} \\
[E_{-\beta'}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= -4E_{\alpha} \\
[E_{-\beta'}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{(\alpha+\beta)'}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 8H_1 - 8H_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha}, E_{\alpha'}] &= 0 \\
[E_{\alpha}, E_{\alpha'}] &= 4H_2' - 4H_3' \\
[E_{\alpha}, E_{\beta'}] &= 4E_{(\alpha+\beta)'} \\
[E_{\alpha}, E_{\beta'}] &= 0 \\
[E_{\alpha}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{\alpha}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= -4E_{-\beta}' \\
[E_{\beta}, E_{\alpha'}] &= 4E_{(\alpha+\beta)'} \\
[E_{\beta}, E_{\alpha'}] &= 0 \\
[E_{\beta}, E_{\beta'}] &= 0 \\
[E_{\beta}, E_{\beta'}] &= 4H_2' - 4H_1' \\
[E_{\beta}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{\beta}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 4E_{-\alpha}' \\
[E_{(\alpha+\beta)}, E_{\alpha'}] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{(\alpha+\beta)}, E_{\alpha'}] &= -4E_{\beta}' \\
[E_{(\alpha+\beta)}, E_{\beta'}] &= 0 \\
[E_{(\alpha+\beta)}, E_{\beta'}] &= 4E_{\alpha}' \\
[E_{(\alpha+\beta)}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{(\alpha+\beta)}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 4H_1' - 4H_3'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{-\alpha}, E_{\alpha'}] &= 4H_3' - 4H_2' \\
[E_{-\alpha}, E_{\alpha'}] &= 0 \\
[E_{-\alpha}, E_{\beta'}] &= 0 \\
[E_{-\alpha}, E_{\beta'}] &= -4E_{-(\alpha+\beta)'} \\
[E_{-\alpha}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 4E_{\beta}' \\
[E_{-\alpha}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{-\beta}, E_{\alpha'}] &= 0 \\
[E_{-\beta}, E_{\alpha'}] &= -4E_{-(\alpha+\beta)'} \\
[E_{-\beta}, E_{\beta'}] &= 4H_1' - 4H_2' \\
[E_{-\beta}, E_{\beta'}] &= 0 \\
[E_{-\beta}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 4E_{\alpha}' \\
[E_{-\beta}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 0 \\
[E_{-(\alpha+\beta)}, E_{\alpha'}] &= 4E_{\beta}' \\
[E_{-(\alpha+\beta)}, E_{\alpha'}] &= 0 \\
[E_{-(\alpha+\beta)}, E_{\beta'}] &= -4E_{-\alpha}' \\
[E_{-(\alpha+\beta)}, E_{\beta'}] &= 0 \\
[E_{-(\alpha+\beta)}, E_{(\alpha+\beta)'}] &= 4H_3' - 4H_1' \\
[E_{-(\alpha+\beta)}, E_{-(\alpha+\beta)'}] &= 0
\end{aligned}$$

表 A-4 H_1^+ 、 H_2^+ 、 H_3^+ 、 $E_{\pm\alpha}^+$ 、 $E_{\pm\beta}^-$ 、 $E_{\pm(\alpha+\beta)}^+$ 与 H_1^- 、 H_2^- 、 H_3^- 、 $E_{\pm\alpha}^-$ 、 $E_{\pm\beta}^+$ 、 $E_{\pm(\alpha+\beta)}^-$ 的对易关系

H_1^+ 、 H_2^+ 、 H_3^+ 、 $E_{\pm\alpha}^+$ 、 $E_{\pm\beta}^-$ 、 $E_{\pm(\alpha+\beta)}^+$ 构成一个 A_2 李代数。其对易关系如下：

$$\begin{aligned}
[H_1^+, E_{\pm\alpha}^+] &= 0 \\
[H_1^+, E_{\pm\beta}^-] &= \pm 4E_{\pm\beta}^- \\
[H_1^+, E_{\pm(\alpha+\beta)}^+] &= \pm 4E_{\pm(\alpha+\beta)}^+ \\
[H_2^+, E_{\pm\alpha}^+] &= \pm 4E_{\pm\alpha}^+ \\
[H_2^+, E_{\pm\beta}^-] &= \mp 4E_{\pm\beta}^- \\
[H_2^+, E_{\pm(\alpha+\beta)}^+] &= 0 \\
[H_3^+, E_{\pm\alpha}^+] &= \mp 4E_{\pm\alpha}^+ \\
[H_3^+, E_{\pm\beta}^-] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H_3^+, E_{\pm(\alpha+\beta)}^+] &= \mp 4E_{\pm(\alpha+\beta)}^+ \\
[E_{\alpha}^+, E_{-\alpha}^+] &= 16H_2^+ - 16H_3^+ \\
[E_{\alpha}^+, E_{\beta}^-] &= -8E_{(\alpha+\beta)}^+ \\
[E_{\alpha}^+, E_{-\beta}^-] &= 0 \\
[E_{\alpha}^+, E_{(\alpha+\beta)}^+] &= 0 \\
[E_{\alpha}^+, E_{-(\alpha+\beta)}^+] &= 8E_{-\beta}^- \\
[E_{-\alpha}^+, E_{\beta}^-] &= 0 \\
[E_{-\alpha}^+, E_{-\beta}^-] &= 8E_{-(\alpha+\beta)}^+ \\
[E_{-\alpha}^+, E_{(\alpha+\beta)}^+] &= -8E_{\beta}^-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha}^{+}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= 0 & [E_{\beta}^{-}, E_{(\alpha+\beta)}^{+}] &= 8E_{\alpha}^{+} \\
[E_{\beta}^{-}, E_{\beta}^{-}] &= 16H_1^{+} - 16H_2^{+} & [E_{\beta}^{-}, E_{-(\alpha+\beta)}^{+}] &= 0 \\
[E_{\beta}^{-}, E_{(\alpha+\beta)}^{+}] &= 0 & [E_{(\alpha+\beta)}^{+}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= 16H_1^{+} - 16H_3^{+} \\
[E_{\beta}^{-}, E_{-(\alpha+\beta)}^{+}] &= -8E_{\alpha}^{+} & &
\end{aligned}$$

而 $H_1^{-}, H_2^{-}, H_3^{-}, E_{\pm\alpha}^{-}, E_{\pm\beta}^{+}, E_{\pm(\alpha+\beta)}^{-}$ 构成另外一个 A_2 李代数。其对易关系如下：

$$\begin{aligned}
[H_1^{-}, E_{\pm\alpha}^{-}] &= 0 & [E_{\alpha}^{-}, E_{\beta}^{+}] &= -8E_{(\alpha+\beta)}^{-} \\
[H_1^{-}, E_{\pm\beta}^{+}] &= \pm 4E_{\pm\beta}^{+} & [E_{\alpha}^{-}, E_{\beta}^{-}] &= 0 \\
[H_1^{-}, E_{\pm(\alpha+\beta)}^{-}] &= \pm 4E_{\pm(\alpha+\beta)}^{-} & [E_{\alpha}^{-}, E_{(\alpha+\beta)}^{-}] &= 0 \\
[H_2^{-}, E_{\pm\alpha}^{-}] &= \pm 4E_{\pm\alpha}^{-} & [E_{\alpha}^{-}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= 8E_{\beta}^{+} \\
[H_2^{-}, E_{\pm\beta}^{+}] &= \mp 4E_{\pm\beta}^{+} & [E_{\alpha}^{-}, E_{\beta}^{+}] &= 0 \\
[H_2^{-}, E_{\pm(\alpha+\beta)}^{-}] &= 0 & [E_{\alpha}^{-}, E_{\beta}^{+}] &= 8E_{-(\alpha+\beta)}^{-} \\
[H_3^{-}, E_{\pm\alpha}^{-}] &= \mp 4E_{\pm\alpha}^{-} & [E_{\alpha}^{-}, E_{(\alpha+\beta)}^{-}] &= -8E_{\beta}^{+} \\
[H_3^{-}, E_{\pm\beta}^{+}] &= 0 & [E_{\alpha}^{-}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= 0 \\
[H_3^{-}, E_{\pm(\alpha+\beta)}^{-}] &= \mp 4E_{\pm(\alpha+\beta)}^{-} & [E_{\beta}^{+}, E_{\beta}^{+}] &= 16H_1^{-} - 16H_2^{-} \\
[E_{\alpha}^{-}, E_{\alpha}^{-}] &= 16H_2^{-} - 16H_3^{-} & [E_{\beta}^{+}, E_{(\alpha+\beta)}^{-}] &= 0 \\
& & [E_{\beta}^{+}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= -8E_{\alpha}^{-} \\
& & [E_{\beta}^{+}, E_{(\alpha+\beta)}^{-}] &= 8E_{\alpha}^{-} \\
& & [E_{\beta}^{+}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= 0 \\
& & [E_{(\alpha+\beta)}^{-}, E_{-(\alpha+\beta)}^{-}] &= 16H_1^{-} - 16H_3^{-}
\end{aligned}$$

其它对易子均为零。

参考文献

1. Newton, I., Philosophiae naturalis principia mathematica (1687), London.
2. Einstein, A., Ann. Phys. 17(1905), 891
Ann. Phys. 49(1916), 769
3. Planck, M., Ann. Phys. 4(1901), 553
Bohr, N., Phil. Mag. (6) 25(1912), 10
(6) 26(1913), 1
(6) 26(1913), 476
de Broglie, L., Comptes Rendus, 177(1923), 507
Nature, 112(1923), 540
Heisenberg, W. Zeit. Phys., 33(1925), 879
Dirac, P. A. M., Proc. Roy. Soc(London), A114(1927), 243, 710
4. Thomason, J. J., Phil. Mag. (5) 44(1897), 293
5. Rutherford, E., Proc. Lit. & Phil. Soc. (4) 55(1911), 18

- Phil. Mag. (6)21(1911), 668
6. Chaderwick, J., Proc. Toy. Soc. (London), A136(1932), 695
 7. Anderson C. d., Proc. Roy. Soc. (London), 43(1932), 492
 8. Phys. Rev. D (1992) Part II,
 9. Sakata S., Prog. Thero. Phys. 16(1956), 686
 10. Gell-Mann. M., Phys. Rev. 125(1962), 1067
Caltech Report CTSL-20(1961)
Phys. Lett. 8(1964), 214
Neeman Y., Nucl. Phys. 26(1961), 222
Zweig G., CERN Report
 11. Greenberg O. W., Phys. Rev. Lett. 13(1964), 598
 12. DeWitt B. S., Phys. Rev. 160(1967), 1113
 13. Weyl H., Raum, Zeit Materie, 3rd. edit. (Springer, 1920)
London F. Z., Physik 42(1927), 375
 14. Yang C. N. & Mills R. L., Phys. Rev. 96(1954), 191
 15. Glashow S. L., Nucl. PHYS. 22(1961), 579
Weinberg S., & Ward. J., Nouovo Cimento 19(1961), 19
Phys. Lett. 13(1964), 168
 16. Georgi H., & Glashow. S. L., Phys. Rrv. Lett. 32(1974), 438
Georgi H., & Quinn H. R., Weinberg S., Phys. Rev. Lett. 33(1974), 451
 17. Lee T. D., Discrete Mechanics, Erice, August, 1983.
 18. 例如马中骥, 群论及其在物理中的应用, 北京理工大学出版社(1984)
 19. 参见曾谨言, 《量子力学》(上), 科学出版社(1982)
 20. J. C. 邦得列雅金, 《连续群》(上、下)(中译本), 科学出版社(1957)
 21. 谢希德等, 《固体物理》, 上海科学出版社(1961)
 22. 李政道, 《粒子物理和场论简引》, 科学出版社(1984)
Lee T. D., Particle Physics and Introduction to Field Theory
Harwood Academic Publishes(1983)
 23. Gell-Mamm M, Phys. Rev. 125(1962), 1076
Okubo S., Progr. Theor. Phys. 21(1962), 949
 24. Halzen F., & Martin A. D., Quarks and Leptons, John Wiley & Sons (1984)
Okun L. B., Leptons and Quarks, North-Holland Publishing Comp. (1982)
 25. Glashaw S. L., Itiopolos J., & Maiani L., Phys. Rev. D2(1970), 1258
 26. Pati. J. C. and Salam A., see the Preview by Bjorken I. D.,
Proceedings of the 16th International Conference on
High Energy Physics, Chicago-Batavia (1972)V. 2. P304
 27. Itzykson C., and Zuber J. B., Quantum Field Theory, McGraw-Hill Inc. (1980)
 28. Eillot J. P. & Dawber P. G., 《物理学中的对称性》, 科学出版社(1980)
 29. Fermi E., Zs. f. Phys. 60(1930), 320
A. A. 科索洛夫, 《量子电动力学》, 人民教育出版社(1986)
 30. 胡瑶光, 《规范场论》, 华东师范大学出版社(1984)
Lopes, J. L., Gauge Field Theories (An Introduction), Pergamon Press(1981)
 31. Schwiffers R. F., Scientific American 10(1977), 《现代物理学参考资料(5)》(1980)
 32. Will, C. M., Theory and Experiment Gravitational Physics, Cambridge Univ.

Press(1981)

33. Ward, R. M., General Relativity, The Unvi of Chicago Press(1984)
34. Nash C. , and Sen S. , Topology and Geometry for Physists, Academic Press. INC. (1983)
35. Higgs P. W. , Phys. Lett. 12(1964), 132
Phys. Rev. 145(1966), 1156
36. 高崇寿, 《物理》, 13(1984), 666
37. 陈省身, 《微分几何讲义》, 北京大学出版社(1983)
38. 万哲先, 《李代数》, 科学出版社 (1962)